ALEXANDRI ANDERSONI

ABERDONENSIS SVPPLEMENTVM APOLLONII REDIVIVI.

siue,

Analysis problematis hactenus desiderati ad Apollonij Pergæi doctrinam περὶ νεύσεων, à Marino Ghetaldo Patritio Ragusino hucusque, non ita pridem restitutam.

IN QVA

Exhibetur Mechanice æqualitatum tertij gradus siue solidarum, in quibus magnitudo omnino data, æquatur homogeneæ sub altero tantum coefficiente ignoto.

HVIC

Subnexa est variorum problematum practice, eodem Auctore.







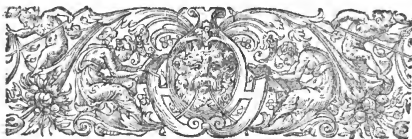
PARISIIS,

Apud HADRIANVM BEYS, via Iacobæa.

ANNO CIϽ, IϽC, XII.

LECTORI ΦΙΛΟΜΑ'ΘΕΙ.

Περὶ τῆς τῶν ὄντων πηλικότητος καὶ ποσότητος, ἡ μαθηματική: hinc copiosus ζητημάτων καὶ προβλημάτων prouentus, quibus soluendis, varia prisci mathematici (vt testatur Pappus Alexandrinus, sub initium libri septimi συναγωγῆς μαθηματικῆς) & varij subiecti congessere problemata, indeque τόπον ἀναλυόμενον dixere, quæ pene omnia, edax rerum tempus deleuerat: sed quorundam illustrium in hac arte opera, pleraque è tenebris iam eruta, & Analytice purior, simplicior, ac facilior quam antea vnquam prodijt. (quod vero in hoc studiorum genere subtilissimo Francisco Vietæ debemus, ac debebunt quotquot in posterum futura sæcula.) sed quum resoluendo, quæsitum vt datum ponimus, & magnitudinum inter se comparatione operando, ad tertium rationis gradum ascendimus, atque hîc æquamus magnitudinem omnino, datam homogeneæ ignotæ, siue omnino, siue sub altero coefficiente noto, hactenus ἀγεωμέτρητοι substitimus: & illud quidem, non nisi duarum mediarum rationis continuæ inter duas datas rectas lineas inuentione (quod problema solidum adhuc æstimatur.) absolui potest: hoc autem quâ docui hoc primo lemmate, ratione, facile perficitur, in quo quicquid plurimum librorum qui ad ἀναλυόμενον τόπον spectabant, complexu continetur, (quos quidem alioqui quoties vsus expostulat, ad manus habere necessarium esset) inclusum, vbicunque vsus opusve exigit, promptum habes & paratum, modo prima Analytices elementa edoctus. & quoniam à viro præclaro, & mathematico exercitatissimo, Marino Ghetaldo Patritio Ragusino, in Apollonio suo rediuiuo siue resuscitatâ Apollonij Pergæi inclinationum doctrinâ, relictum est hoc sequens problema, ad aliorum ingenia in hunc puluerem sollicitanda, cui quidem à nemine (quod sciam) hodie penitus satisfactum est, in eo, analyticen nostram exerceri volui. studio itaque in te meo, & inuentis in tuum vsum faue ac fruere. Vale.



ILLVSTRISSIMO AC REVERENDISSIMO DOMINO SVO, DOMINO PERRONIO, S. R. E. CARDINALI,

Archiepiſcopo Senonenſi, Galliarum & Germaniæ Primati, magno Franciæ Eleemoſinario, &c.

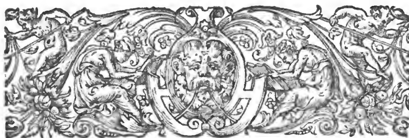


PLENDIDOS *hoſce titulos & ſacrata nomina*, (CARDINALIS ILLVSTRISSIME) *non leuis aulæ fauor dedit, aut improuiſus caſus attulit, ſed dignitas tua ac virtus meruit. nam ſiue rei ſacræ ſiue ciuili vacas, in te omnium oculos ſimul ac mentes trahis: conſilio prudens, vitâ probus, doctrinâ præſtans. tum in Mathematicis quidem*, καὶ πάσῃ θεωρίᾳ ἐπιστημονικῇ *adeo excellis, vt vel tuum ſolum ſuper iſtis iudicium* ἀνεξέταστα τῆς ἀποδείξεως *apud omnes locum, merito obtineat. & ſane in rerum ve-*

ritate perquirenda, quæ certis velut rationum gradibus & interuallis, inter se vel conueniunt vel dissident, qui harum artium subtilitates non prægustarit, rite philosophari nequit: hinc nobilis illa vox Platonis θεὸν ἀεὶ γεωμετρεῖν. sic te philophantium principem iure admiramur, qui ita res inter se componere & comparare nouisti, vt subtilissimæ mentis tuæ aciei nihil inconspectum præterfugiat. & vt Cynosura regionum nescios ducit, deuios dirigit, ita te in hac veritatis inquirendæ viâ, ignorantes ὁδηγὸν, aberrantes διορθωτὴν suspicimus. quapropter μάθημα hoc πρόχειρον ad analyticen siue topicen mathematicam, expeditissimum viæ hactenus impeditæ & sinuosæ compendium, tibi lubens meritò offero: vt & à nobilissimi nominis tui splendore, qui toti hactenus terrarum orbi illuxit, velut à sole minora sidera, lumen mutuetur, & supremæ quâ apud literatos vales auctoritatis tuæ patrocinio ac tutelâ muniatur. quod si pro votis (vt spero) accipis, animos mihi addet hæc profusa tua benignitas, his maiora & te mage digna moliendi. Vale.

Lutetiæ Parisiorum VIII. KALEND. MARTIAS.

Illustriss. nominis tui
cultor humillimus.
ALEXANDER ANDERSONVS.



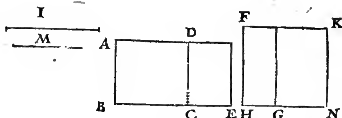
ALEXANDRI ANDERSONI ABERDONENSIS SVPPLEMENTVM Apollonij Rediuiui.

LEMMA I.

Si fuerit rectangulum, ſiue plurium rectangulorum aggregatum, vel differentia, ſub lateribus, vno quidem ignoto, at reliquis cognitis, ad rectangulum ſub latere vtróque dato, vt data recta, ad idem latus ignotum: dabitur ignotum latus.



SIT primum rectangulum ſub lateribus, AB dato, at BC ignoto, ad rectangulum ſub lateribus FH, HG datis, vt recta data I, ad idem latus ignotum BC: dico dari BC.



Ipſi enim AB, vel DC (completo nempe rectangulo ABCD.) datæ, applicetur rectangulum datum FG. ſitque latitudo ortiua CE. eritque BC, ad CE, vt recta data I, ad BC. & propterea BC quadratum, rectangulo ſub CE & I datis, æquale. datur itaque BC.

Sit deinde aggregatum rectangulorum AC, FG, ad rectangulum GK, ſub latere vtroque dato, vt recta data I, ad latus idem ignotum BC: dabitur iterum BC. applicentur enim ipſi AB, vel DC datæ, rectangula FG, (cuius latitudo fuit hactenus CE.) & GK, cuius latitudini æqualis ſit recta M. eritque BE ad M, vt recta data I, ad BC. & rectangulum BE in BC, æquale erit rectangulo M in I, dato. datur autem CE differentia extremarum, tum rectangulum ſub extremis, dabuntur igitur extremæ BE, BC. hoc quomodo fiat, vide ſequens lemma.

Sit tertio FN rectangulum, minus rectangulo AC, ad GK rectangulum, vt recta data I, ad latus ignotum BC. dico dari BC. applicetur vt prius ipſi AB datæ, rectangulum FN, & latitudo ortiua ſit BE, tum GK rectangulum, oriaturque latitudo M: & erit CE, ad M, vt I ad BC. & rectangulum ſub CE, BC, rectangulo ſub M & I, æquale. datur autem ſumma extremarum

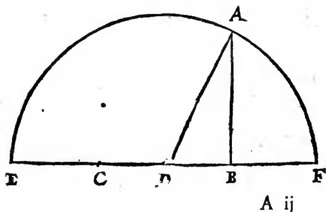
B E, & rectangulum ſub extremis M in I: dabuntur igitur extremæ BC,CE. ex altero lemmate ſequente.

Quarto ſit latus ignotum B E. & eſto rectangulum ſub AB, BE, minus F G rectangulo, ſub lateribus datis, ad G K rectangulum ſimiliter datum, vt recta I, ad B E. dabitur quoque BE. ipſi enim AB, vt ſupra, applicetur FG, ortaque latitudo ſit C E, tum G K, cuius latitudo ſit M. & erit BC ad M, vt I ad BE, & rectangulum B C in B E, rectangulo M in I æquale. datis itaque C E differentia extremarum, & M in I rectangulo ſub extremis, inueniantur extremæ BE, BC, vt iam docebitur. atque ita coefficienti lateris ignoti, reliquis applicatis, inuenietur quæſitum.

LEMMA II.

Data media trium proportionalium, & differentia extremarum, inuenire extremas.

Sit data AB media, differentia CB, quæ iungantur ad angulum rectum CBA. & diuidatur CB bifariam in D. tũ centro D, interuallo DA, ducatur ſemi circulus EAF, eruntque extremæ quæſitæ EB, BF.



Quoniam enim æquales sunt (ex constructione) ED, DF, itémque CD, DB, æquales quoque erunt BF, EC. & propterea BC differentia extremarum EB, BF, inter quas BA media est. quod erat faciendum.

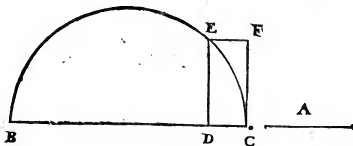
COROLLARIVM.

Hinc data differentia extremarum , & rectangulo sub extremis, facile inuenientur extremæ, si dato rectangulo, fiat æquale quadratum, ex cuius latere, & differentia data, inueniantur extremæ, vt supra.

LEMMA III.

D*Ata summa extremarum , & rectangulo sub extremis, inuenire extremas.*

Sit data summa extremarum BC, rectangulum sub extremis æquale quadrato A. fiat ipsi BC perpendicularis CF, ipsi A æqualis, cui ad angulos rectos sit FE, secans semiperipheriam super diametrum BC decircinatam, in puncto E. & dimittatur perpendicularis ED.



Eritque rectangulum BDC, quadrato DE, id est A, æquale. quod erat faciendum.

PRO-

Problema.

DAtis duobus ſemicirculis, in directum baſes habentibus, inter eorum circumferentias intercipere rectam datæ æqualem, quæ ad alterutrius ſemicirculi, angulum alterutrum pertineat.

Dicitur linea ad angulum vel punctum pertinere, ſeu inclinari, quum continuata, per punctum illud tranſit. Hoc autem problema, vt varios caſus, ita & ſingulis caſibus proprias habet determinationes: diſtingui verò poteſt hæc caſuum multitudo, ſecundum diuerſas ſemicirculorum poſitiones. vel itaque dati ſemicirculi ſeſe contingunt, vel non contingunt. contingere vero ſe poſſunt dupliciter, primum exterius, neutro reliquum includente, atque hinc exiſtunt tres caſus: priores duo quum ſemicirculi dati in eandem partem baſeos vergunt, quorum primus, quum iubetur datum ſegmentum intercipi inter vtriuſque peripheriæ connexum alter, quum inter vnius connexum & reliqui concauum. Sunt itaque ſemicirculi exterius ſeſe contingẽtes ADB, BEFC, rectáque data H. & ab angulo A, educenda ſit recta AE, intercepta ſegmento DE, ipſi H æquali, extra vtriuſque peripheriam. oportet autem rectam datã H, non maiorem eſſe ſegmento rectę ab angulo A eductæ, & ſemicirculum B E F C contingentis, intercepto inter punctum contingentiæ, & peripheriam connexam A D B. ſit igitur hoc factum. ducatúrque ſemicirculus A G C, ſuper rectam A C. & agantur rectæ D B, G C.

Iam erit vt AC ad AG, ita AB ad AD. & rectangulum AD in AC, æquale rectangulo AB in AG. & rectangulum CAB, rectangulo FAE quoque æquale est, atque etiam aggregatum AG in AB, FG vel DE (sunt enim æquales, nam ducta recta ex centro L circuli BEFC, perpendiculari in EF, erunt DM, MG, æquales, sicut & EM, MF, vnde & reliquæ DE, FG æquales quoque erunt.) in BC, æquale est aggregato FG in AC, AF in AB. (est enim AB in AG æquale aggregato AF in AB, & FG in AB.) & aggregatum quadrati FG, & rectanguli FAE, æquale est aggregato rectanguli AG in FG, & AD in AF. (est enim rectangulum AE in AF, æquale rectangulis AD in AF, & DE vel FG in AF.) sed AF in AB, ad AF in AD est vt AB ad AD. & FG in AC, ad FG, in AG. est vt AC ad AG, i. AB ad AD. ergo & totum aggregatum FG in AC, AF in AB, id est AG in AB, FG, in BC, est ad totum aggregatum AG in FG, & AD in AF, id est FG quadrati, & rectanguli CAB, vt AB ad AD. hoc est aggregatum AD in AC, FG in BC, est ad aggregatum FG quadrati, & rectanguli CAB, vt recta AB, ad rectam AD. dabitur igitur ex primo lemmate recta AD, quare & tota AE.

Sin autem ducatur tangens AIK, esse segmentum IK maximum omnium quæ inter datos circulos interponi possunt, & ad angulum A pertinent, sic demonstratur, est enim AK maior quam AE, & AI minor quam AD, ergo relinquitur IK maior quam DE atqui eodem modo ostendetur, quo angulus DAB minor fuerit, segmenta quoque intercepta minora esse.

In secundo casu ex hac semicirculorum positione, oportet datam rectam H ipsa quidem BC non maiorem, nec recta IK minorem esse, sit itaque media, & GE illi æqualis, in sequenti figura, cuius constructio similis priori.

Eritque vt supra AC in AG, æquale AB in AD. & aggregatum AD in AB, GE in BC, æquale aggregato GE vel FD in AC, (sunt enim GF, ED æquales, vt ostensum est, vnde addito communi FE, erunt quoque GE, FD æquales.) & AF in AB. & aggregatum rectanguli CAB, id est EAF, & quadrati FD vel GE, æquale est aggregato FD vel GE in DA, & AF in AG. (est enim EAF rectangulum æquale rectangulis AF in AG, & AF in GE vel FD. at FD quadratum cum rectangulo FD in AF, æqualia sunt rectangulo FD in DA) sed GE in AC, ad

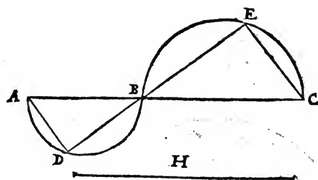
GE in DA, eſt vt AC ad DA. & AF in AB, ad AF in AG, eſt vt AB ad AG, id eſt AC ad AD. ergo & aggregatum GE in AC, & AF in AB, id eſt AD in AB vel AG in AC, & GE in BC, eſt ad aggregatum GE in DA, & AF in AG, id eſt CAB rectanguli, & quadrati GE, vel FD, vt AC ad AD, vel AB ad AG dabitur itaque AG. quare & AE.

Eſſe autem GE ipſa BC minorem, ſic demonſtratur. eſt AB ad AG, vt BC ad GD. atqui AB ipſa AG maior eſt, ergo & BC ipſa GD maior erit. multo itaque maiori ipſa GE at eandem maiorem eſſe ipſa IK, ita probatur, protrahatur IK ad N punctum in circumferentia ADC, eritque DG maior ipſa IN, eſt enim vt AB ad BC, ita AG ad GD, & ita AI ad IN, & permutando, vt AG ad AI, ita GD ad IN. eſt autem AG ipſa AI maior, ergo & GD ipſa IN maior erit. & proinde eius dimidium ipſo IK maior, ergo tota GE multo maior quam IK, quod erat demonſtrandum.

Tertius autem Caſus ex hac ſemicirculorum contingentia eſt, quum oblati ſemicirculi in diuerſas partes communis baſeos diuergunt. oportet autem in huiuſmodi caſu, rectam datam compoſita ex baſibus non maiorem eſſe.

Sint itaque ſemicirculi dati ADB infra, at BEC ſupra communem baſin AC. ſitque recta data H. minor ipſa AC. diuidatur recta H, ſecundum rationem AB ad BC, ſitque ſegmento ipſi AB analogo æqualis recta DB, & reliquo ſegmento æqualis ſit BE.

QVO-



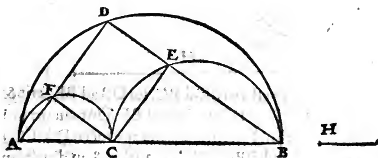
Quoniam igitur est vt AB ad BC, ita DB ad BE, erit & permutando AB ad DB, vt BC ad BE. sunt autem anguli ad D & E simul recti (ductis nempe rectis DA, EC,) erunt igitur anguli EBC, DBA, æquales, & in directum erunt DB, BE. quare inter peripherias BEC, ADB, intercepta est recta DE, ad angulum B pertinens, ipsique H datæ æqualis, quod erat faciendum.

Esse autem DE minorem ipsa AC, manifestum est, quoniam AB maior est quam BD, & BC maior quam BE, ergo & tota AC maior erit tota DE.

Semicirculi dati secundo, ita sese contingere possunt, vt alter reliquum includat, atque hinc triplex iterum casus emergit, vel enim intercipienda recta, ad communem semicirculorum contactum pertinebit, vel ad reliquum angulum, idque vel maioris, vel minoris semicirculi. in primo oportet rectam datam, basium differentia non maiorem esse.

Sint itaque dati semicirculi ADB maior & exterior, contingens minorem & interiorem CEB, in puncto B. sitque basium differentia AC, super quam describatur semicirculus AFC. & sit recta data H, non maior ipsa AC.

apteturitaque ipsi AFC peripheriæ, recta FC, ipsi H æqualis. ducaturque recta AFD, secans circumferentiam maiorem in D puncto, tum ab angulo B, educatur recta BED, intercepta segmento DE, quod dico rectæ F C, siue H datæ, æquale.



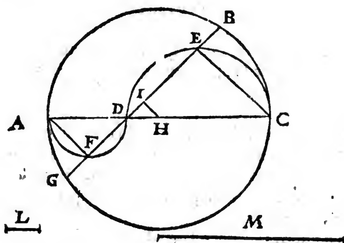
Quoniam enim in quadrilatero FDEC, (iunctis scilicet C, E punctis) anguli F, D, E, in semicirculis, recti sunt, erit & FCE angulus (complementum nempe ad quatuor rectos.) rectus quoque atque adeo parallelogrammum erit rectangulum FDEC, & latera opposita FC, DE, æqualia, quod erat demonstrandum.

Determinatio autem problematis manifesta est: nam AC maxima est earum omnium, quæ semicirculo AFC adaptari possunt.

Si ad maioris semicirculi angulum reliquum pertinere debet data recta, duplex existit casus, vel enim caua maioris & conuexa minoris peripheria terminanda est: & tum eadem erit pragmatia quæ primi casus, vt inde patet; sunt enim DE, FG in primi casus figura æquales: vel vtriusque semicirculi peripheria caua eadem finienda erit, quod eodem modo perficietur quo casus secūdus, sunt enim illic GE, FD æquales, quare eo recurratur.

Sed iam ad minoris semicirculi angulū reliquum pertineat data recta, atque hinc duo casus exorientur, nam vt supra, vel caua maioris & conuexa minoris, vel vtriusque caua peripheria, terminanda est. in priori casu, oportet rectam datam media proportionali inter minoris basin, & basium differentiam, non maiorem esse.

Sint igitur semicirculi ABC, maior, DEC minor, sese contingentes in C puncto. sitque data recta L, non maior quam est media proportionalis inter AD, DC. & sit factum, ducta nempe recta D B, intercepta segmento EB, ipsi L æquali: producaturque DB, in circumferentiam maioris semicirculi in G. & sit ductus semicirculus AFD. eritque aggregatum AD in DE, EB in AC, ad differentiam AD in DC & EB quadrati, vt DC ad DE.



Est enim AD ad FD, vt DC ad DE. & rectangulum AD

in DE, æquale rectangulo FD in DC. eſt autem aggregatum FD in DC, EB vel GF in AC, (ſunt enim EB, GF æquales, vt poſt demonſtrabitur) æquale aggregato GD in DC & GF in AD. & AD in DC, æquale eſt GD in DB. eſt autem GD in DB, minus EB vel GF quadrato, æquale aggregato GD in DE & FD in EB vel GF. atqui GD in DC ad GD in DB eſt, vt DC ad DE, & GF in AD ad GF in FD, eſt vt AD ad FD, vel DC ad DE. ergo & aggregatum GD in DC, GF in AD, id eſt ex demonſtratis AD in DE, EB in AC, eſt ad aggregatum GD in DE, GF vel EB in FD, id eſt vt oſtẽſum eſt, ad differentiam AD in DC, & EB quadrati, vt DC data, ad DE quæſitam dabitur igitur DE, ex præmiſſo lemmate.

Eſſe autem GF, EB æquales, ſic demonſtratur ducatur a centro H circuli ABC, ad GB: perpendicularis HI eruntque GI, IB æquales, eſt autem AD ad DF, vt DH ad DI, & permutãdo AD ad DH, vt FD ad DI, & componendo AH ad DH, vt FI ad DI, & iterum permutando AH ad FI, vt DH ad DI, id eſt HC ad IE, æquales ſunt autem AH, HC, æquales igitur erunt FI, IE, quare & reliquæ GF, EB, quoque æquales: quod erat demonſtrandum.

Sed & EB minorem eſſe media proportionali inter AD, DC, ſic oſtenditur. eſt enim quadratum mediæ inter AD, DC, æquale rectangulo GDB: atqui rectangulum GDB, maius eſt quadrato GF, vel EB: ergo media proportionalis inter AD, DC, maior erit ipſa EB, vel alia quauis ſit intercepta.

In reliquo caſu ex hac datę, ad minoris ſemicirculi angulum reliquum προσνεύειν oportet rectam datam, ma-

ioris semicirculi basi non maiorem esse, nec media proportionali inter minoris basin, & basium differentiam, minorem esse.

Sit itaque factum: & repetatur figura proxima, sitque GE æqualis datæ M. & erit differentia DC in GE, & spatij quo differunt AD in GE, & AD in GD, id est AD in DE, ad DC quadratum, vt AD ad GD. est enim AD ad FD, vt DC ad DE, & rectangulum AD in DE, æquale rectangulo FD in DC. est autem DC in GE, minus DC in FD, æquale DC in DB: (sunt enim GE, FB, æquales propter GF, EB, æquales, vt supra ostensum est.) atqui DC in DB, ad DC quadratum, est vt BD ad DC, id est AD ad GD. erit igitur differentia DC in GE, & spatij quo differunt AD in GE, AD in GD, ad DC quadratum, vt AD ad GD. dabitur igitur GD.

Determinatio autem manifesta est, nam GE, minor est ipsa AC, siquidem & tota GB eadem minor est, at maior est GE media proportionali inter AD, DC, siue GD, DB. quoniam enim quadratum dictæ mediæ, æquale est rectangulo sub GD, DB. atqui hoc minus est quadrato dimidiæ GI, ergo multo minus quadrato GE, est itaque GE dicta media proportionali maior, quod si pũctam D cadat in H, vel inter H & C: tum recta GD erit vel æqualis, vel maior dicta medica proportionali, quare etiam in ijs casibus determinatio patet.

Si oblati semicirculi sese, non tãgunt, vel igitur se secãt, vel non secãt hocque bifariam: vel enim alter reliquũ includit, vel neuter, quod si neuter reliquũ includit, vel ad easdem sunt partes baseos, vel ad diuersas. Si ad easdem pertinent, duplex orietur casus: aut enim segmentum

datum intercipiendum, erit totum extra vtrumque, vel alterum tantum, in priore casu, oportet rectam datam non minorem esse parte baseos, inter datos circulos interiecta, nec maiorem segmento rectæ eductę ab angulo ad quem pertinere debet, & reliquum tangentis, intercepto inter punctum contactus vnius, & conuexam reliqui peripheriam.

Sint itaque quales expetuntur circuli, AIB, CHGD, quorum neuter, reliquum nec tangat, nec secet, nec includat. Sitque data intercipienda M. sit hoc factum: & IH ad angulum A pertinens, ipsi M æqualis. fiatque DE æqualis ipsi BC, & ducatur semicirculus AFE. dico aggregatum rectangulorum AI in AE, IH in BE, ad aggregatum quadrati IH, & rectanguli DAC, esse vt AB ad AI.

M
P
F
L G
K O
H
I
A B O N D E

Est enim AE ad AF, vt AB ad AI. & rectangulum AF in AB. æquale rectangulo AE in AI. & AD in AC æquale rectangulo AG in AH. sed aggregatum AF in AB, IH in BE, æquale est aggregato IH in AE, & AG in AB (est enim AF in AB æquale AG in AB, & HI vel GF in AB,

(sunt enim IH GF æquales, quod eodem modo demõstrari potest, quo ad primam figuram huius problematis DE, FG ostensæ sunt æquales.) & aggregatum quadrati HI, vel GF, & rectanguli GAH, æquale est aggregato AF in IH, vel GF, & AI in AG, (est enim AG in AH, æquale IH vel FG, in AG, & AI in AG.) sed est AE in IH, ad AF in IH, vt AE ad AF, id est AB ad AI, & AG in AB ad AG in AI, vt AB ad AI. Ergo aggregatum AE in IH, AG in AB, (id est AI in AE, & IH in BE.) ad aggregatum AF in IH, AG in AI, (id est quadrati IH, & rectanguli DAC.) est vt AB ad AI. data itaque recta intercipienda M, dabitur & AI, ex primo lemmate. quod erat quæsitum.

Quod si ducatur recta AKL, tangens circulum CGD in L & secans circulum AIB in K, esse IH, ipsa KL minorem, manifestum est. nam tota AH, tota AL minor est, at AI pars, maior quam AK, ergo reliqua IH reliqua KL minor est. eodémque modo, est AH maior ipsa AC at AI minor quam AB, ergo reliqua IH, reliqua BC maior est.

Sin in hac semicirculorum θέσει, recta intercipienda, semicirculi ad cuius angulum pertinere debet conuexa, reliqui vero caua peripheria, terminẽda sit, oportet rectam datam non maiorem esse, posterioris base cõtinuata basium intersegmento, nec minorem segmento tangentis eundem posteriorem, ab alterius angulo, inter punctum contingentiæ, & conuexam prioris peripheriam intercepto.

Sint vt prius circuli dati AIB, CHGD, rectaque data P. & sit factum quod iubetur, ducta nimirum AG, ha-

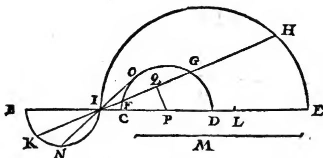
bens segmentum IG, rectæ, P, æquale. fiatque DE, æqualis ipsi BC vt prius, & sit ductus semicirculus AFE, reliquaque perficiantur vt in priori schemate. erit aggregatum rectangulorum AE in AI, BE in IG vel HF, (sunt enim æquales, quia IH, GF æquales sunt) ad aggregatũ rectanguli DAC, & quadrati IG, vel HF, vt AB ad AI.

Est enim vt supra, AE in AI, æquale rectangulo AB in AF & aggregatum AB in AF, & IG vel HF in BE, æquale aggregato HF in AE & AH in AB. aggregatum autem rectanguli DAC, id est GAH, & quadrati IG vel HF, æquale est aggregato AH in AI, AH in IG vel HF, & quadrati ipsius IG, vel HF. sed quadratum HF vel IG, cum rectangulo AH in HF æquale est rectangulo HF in FA. ergo aggregatum GAH, vel DAC, & quadrati IG, æquale est aggregato HF in FA, & AH in AI. est autem vt supra HF in AE, ad HF in FA, vt AE ad FA, vel AB ad AI. & AH in AB, ad AH in AB, ad AH in AI, vt AB ad AI. ergo & aggregatum HF in AE & AH in AB, (id est AE in AI, & BE in IG vel HF.) est ad aggregatum HF in FA, & AH in AI, (id est ad rectangulum DAC, & quadratum IG vel HF.) vt AB ad AI. data igitur IG, vel P recta, dabitur & AI quæsita. Esse autem BD maiorem ipsa IG, sic ostenditur. ducantur NO, NL perpendiculares ipsis AG, AL ex centro N, circuli CHGD. & erit BN maior quã IO, & ND quam OG: ergo tota BD, tota IG maior est. & IO maior quã KL, est enim AK ad KL, vt AB ad BN, id est, AI ad IO, & permutando AI ad AK, vt IO ad KL. est autem AI ipsa AK maior, ergo & IO, ipsa KL maior erit: & propterea IG ipsa KL multo maior· quod erat demonstrandum.

Quod

Quod si in diuersas baseos partes diuergant dati semicirculi sese nec tangentes, nec secantes, quorúmque neuter reliquum includit, duplex quoque nascetur casus: aut enim vtriúsque caua, aut vnius caua, reliqui vero cõuexa peripheria, intercipiẽda est, & data recta. in priori, oportet rectam datam aggregato basium, & inter segmenti, non maiorem esse, nec minorem recta, ab vnius angulo reliquum tangente, intercepta inter punctum contactus, & canam reliqui peripheriam.

Sint igitur dati semicirculi BKI, CFGD, datáque recta M. & sit factum. ducta nempe recta KIG, ad angulum I pertinens, æqualis datæ. Fiat ipsi BC æqualis DE, Itemque BI, LE, & IC, DL æquales, ducatúrque semicirculus IHE. & erit differentia rectangulorum IL in KG, & IE in IG, ad rectangulum BI in IC, vt ID ad IG.



Est enim KG in IL, æquale KG in IE, minus KG in LE, vel BI. sed IE in KG, minus IE in IG, est IE in KI. hoc autem æquale est ipsi BI in IH. (est enim BI ad IK, vt IE ad IH.) & BI in IH, minus BI in KG, est BI in IF. (sunt enim KF, GH æquales, vt post ostendetur, & propterea KG, FH

C

ergo IH æqualis erit compoſitæ ex KG & IF.) atqui BI in IF, ad BI in IC, eſt vt IF ad IC, id eſt ID ad IG. ergo IL in KG, minus IE in IG, eſt ad BI in IC, vt ID ad IG, quod erat demonſtrandum. hinc ex lemmate præmiſſo, dabitur ſegmentum I G.

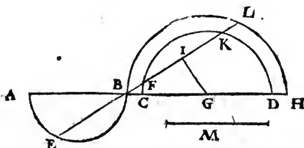
Eſſe autem æquales KF, GH, ſic demonſtratur. à centro P ſemicirculi CGD, ducatur perpendicularis P Q. eritque I P ad I Q, vt PE ad QH, vel BI ad IK. & cōponēdo BP ad KQ, vt PE ad QH. & permutando, BP ad PE, vt KQ ad QH. ſunt autem ex conſtructione æquales BP, PE, ergo & KQ, QH æquales quoque erunt. ſunt autem & FQ, QG æquales, ergo & reliquæ KF, GH, æquales quoque erunt, quod erat demonſtrandum.

Sed & KG minorem eſſe ipſa B D, manifeſtum eſt. nam KI minor eſt quam BI, & IG quam ID, ergo & tota KG, tota BD minor erit. ſimiliter, & eadem KG maior eſt quam NO. (ducta nempe recta N IO, tangente circulum COGD, in O puncto.) eſt enim KI maior quam NI, & IG quam I O. Ergo & tota KG maior erit quam tota N O.

In reliquo caſu ex hac ſemicirculorum poſitione, quum nimirum recta data, caua, ſemicirculi ad cuius angulum pertinere debet, peripheria, & reliqui conuexa terminanda eſt, determinatio maximi & minimi non eſt tam obuia, quam in ſuperioribus experti ſumus, qualem vero præſens demonſtratio ſuggerit, poſt analyſin vide,

Sint dati ſemicirculi AEB, CKD, datáque recta M. & ſit factum. ducta ſcilicet recta EBF æqualis datæ, & fiat ſegmento BC æqualis DH recta. ducaturque ſemi-

circulus BLH. tum recta perpendicularis ex centro G, circuli CFKD, in rectam EBF protensam in L punctum, in peripheria BLH, quæ sit GI. eritque differentia BH in EF, & AH in BF, ad AB in BD, vt BC ad BF.



Est enim AH in BF æquale ipsis AB in BF, & BH in BF, at BH in EF, minus BH in BF, est BH in BE, id est AB, in BL, (est enim AB ad BE, vt BH ad BL.) sed AB in BL minus AB in BF, est AB in FL, vel BK. (sunt enim BF, KL æquales, quoniam BI, IL, itémque FI, IK, æquales quoque sunt.) at AB in BK, ad AB in BD, est vt BK ad BD, vel BC ad BF. Ergo differentia rectangulorum BH in EF, & & AH in BF, est ad AB in BD, vt BC ad BF, quod erat demonstrandum, ex demonstratis igitur dabitur BF.

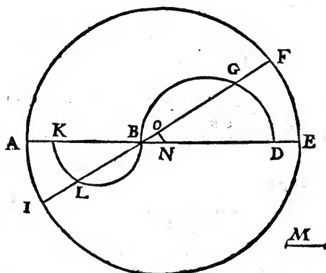
Hinc omnibus ipsi AH applicatis, oportet latitudinem ortam ex applicatione BH in EF, non minorem esse dupla eius, quæ potest rectangulum ex latitudine orta ex applicatione AB in BD, in rectam BC. tum altera extremarum (diuisa nempe priori latitudine ita, vt dicta recta inter eius partes media sit proportionalis.) maiore quidem quam BC, at minore quam est tangens a puncto B, inter B, & punctum contingentiæ in circumfe-

rentia CKD, ſublata ex recta data M, reliquum ſegmentum, minus eſſe debet recta AB, at maius ſegmento dictæ tangentis inter B punctum, & cauam ſemicirculi AEB peripheriam, alioqui dicta recta, intercipi non poteſt. vt ex demonſtratis patet.

Quum circulorum ſeſe nec tangentium, nec ſecantiũ, alter reliquum includit, aut recta data intercipienda, ad maioris ſemicirculi angulum pertinebit, aut ad minoris, & ex vtroque bini caſus deriuantur, ex priori quidem, vel recta data caua maioris & conuexa minoris circumferentia terminãda eſt: vt in ſuperiori penultima figura, recta G H. vel vtriúſque caua peripheria contineri debet: qualis in eadem eſt recta F H. in huiúſmodi ſemicirculorum poſitione, aut (repetita figura iam dicta) DE, ipſa CI minor, aut maior, aut eidẽ æqualis eſt. ſi minor, petatur prioris caſus pragmatia ex nono caſu, sũt enim illic IH, GF ęquales. ſi maior, operaberis vt in eadem ſuperiori penultima figura, facta nimirum BC, ipſi DE æquali, ſunt enim illic KF, GH æquales, vt oſtẽſum eſt. quod ſi æquales fuerint IC, DE, æquales quoque erunt IF, GH, quod in proxima præcedente figura probatum eſt, indidemque & reliquo quoque caſui ſatisfiet.

Iam ad minoris ſemicirculi angulum pertineat data recta, ſintque dati ſemicirculi AFE, BGD vnde duo iterum oriuntur caſus, aut enim maioris caua, minoriſque conuexa, aut vtriuſque caua peripheria finienda eſt data recta. ſit itaque pro priori, data recta M. ac primũ, ſit DE minor quam AB, & tum oportebit datam rectam, media proportionali inter AB, BE non maiorem eſſe, nec recta DE minorem.

Sit igitur factum, ducta nimirum recta BGF, habens segmentum GF, ipsi M æquale. sitque maioris semicirculi ceutrum N. & ipsi ND fiat æqualis NK, ducaturque semicirculus KLB, intersectus a recta FGB, (protensa in circumferentiam maiorem, in I punctum) in puncto L. eritque differentia aggregati BD in BI, KB in GF, & rectãguli GF in BD, ad rectangulum AB in BE, vt recta KB ad BI.



Sunt enim primum GF, IL æquales, ducta enim a centro N, ad rectam IF perpendiculari NO, est KB ad BN, vt LB ad BO. & componendo, KN ad LO, vt BN ad BO, id est ND ad OG, & permutando KN ad ND, vt LO ad OG. sunt autem ex constructione KN, ND æquales, ergo & LO, OG æquales quoque erunt, igitur & reliquæ IL, GF. Iam BD in BI, minus BD in GF, vel IL, est BD in LB. hoc autem æquale KB in BG. (est enim BD ad BG,

vt KB ad LB.) sed aggregatum KB in GF, KB in BG, id est KB in BF, est ad AB in BE, id est IB in BF, vt KB ad IB. ergo differentia aggregati BD in BI, KB in GF, & rectanguli GF in BD, est ad rectangulum AB in BE, vt recta KB ad rectam IB, quod erat demonstrãdum. datis igitur semicirculis positione vt supra, rectáque M, dabitur IB, ex demonstratis.

Esse autem rectã GF minorem media proportionali inter AB, BE, sic ostenditur quadratum mediæ inter AB, BE, æquale est rectangulo I B F, hoc autem maius quadrato I L, vel G F, ergo & media proportionalis inter AB, B E maior quoque est quam GF. at eadẽ GF vel IL, minor est quam DE vel AK quoniam tota BI, maior est tota BA, & BL pars, minor parte BK: ergo reliqua LI, reliqua AK maior erit.

Quod si AB, DE fuerint æquales, æquales quoque erunt IB, GF, dataque interponenda, media proportionali inter AB, BE maior esse nõ debet, nec recta AB vel DE, minor. quod vlteriore declaratione non indiget.

Sit iam DE maior quam AB, & sit data recta M. determinationem vide infra analysin. sitque factũ, ducta scilicet recta BGF, habens segmentum GF, æquale datæ M. fiatque AC æqualis ipsi D E. & ducatur semicirculus BHC, secans rectam BGF, in H puncto, protendatur autem BH GF recta, in I punctum in circumferentia maiore AFE, eritque differentia rectangulorum GF in compositam ex BD, BC, & BD in IB, ad rectangulum AB in BE, vt recta BC ad IB rectam.

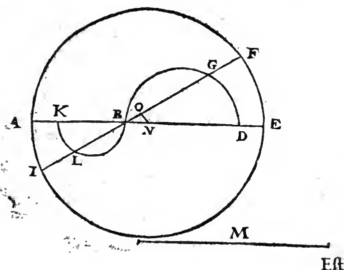
Sunt primum IH, GF æquales, quoniam ex constructione sunt AC, DE æquales, & reliquæ CN, ND, ex æqualibus AN, NE æquales quoque erunt, & propterea H O, O G æquales, (ductis perpendicularibus CH, NO, DG.) vnde & reliquæ IH, GF æquales: est autem IH vel GF in BD, minus IB in BD, æquale BH in BD, hoc autem æquale est BG in BC. (est enim BD ad BG, vt BC ad BH.) at aggregatum BG in BC, & I H vel GF in BC, id est BF in BC, est ad AB in BE, id est IB in BF, vt BC ad IB: ergo differentia I H, vel G F, in compositam ex BD, BC, & BD in IB, est ad rectangulum AB in BE, vt recta BC, ad rectam IB, quod erat demonstrandum. dabitur igitur ex præmissis segmentum IB.

Hinc ipsi BD applicatis rectangulis, GF in compositam ex BD, BC, & A B in B E, oportet latitudinem priorem, non minorem esse dupla rectæ quæ potest rectan-

gulum ex latitudine posteriore, in rectam BC. tum altera extremarum non minore ipsa AB, nec maiore media proportionali inter AB, BE, sublata ex recta data, reliquū segmentū, ipsa BC maius esse non debet. Alioqui recta data interponi non potest, vt ex demonstratis liquet.

Reliquus casus ex hac semicirculorum positione est, quum data recta, vtriusque caua peripheria intercipienda venit: qualis in figura præcedenti recta IG. hic autem casus, vt & superior, pro diuersa ratione DE, ad BA, diuersas admittit & factiones, & determinationes.

Repetatur itaque primū præmissa figura, in qua DE, ipsa AB minor est. sitque factum, recta nempe IG sit æqualis datæ M. oportet autem rectam datam ipsa AD non maiorem, nec media proportionali inter AB, BE minorem esse. erit itaque tum, differentia rectanguli BD in IG, & spatij quo differunt KB in IG, & KB in IB, id est KB in BG, ad rectangulum AB in BE, vt BD data, ad IB quæsitam.



Est

Eſt enim KB in BG, æquale BD in LB. (nam eſt BD ad BG, vt KB ad LB.) & BD in IG, minus BD in LB, eſt BD in BF (oſtenſæ ſunt enim IL, GF æquales.) eſt autem BD in BF, ad IB in BF, id eſt AB in BE, vt BD ad IB. ergo differentia rectanguli BD in IG, & Spatij quod differunt KB in IG, & KB in IB, eſt ad rectangulum AB in BE, vt BD data, ab IB quæſitam. dabitur igitur IB.

Eſſe autem IG minorem ipſa AD, manifeſtum eſt. nam tota AE, maior eſt tota IF, & GF maior quam DE, vt oſtenſum eſt. Ergo reliqua IG, reliqua AD minor eſt. Eſt autem eadem maior media proportionali inter AB, BE, eſt enim huius quadratum, æquale rectangulo IBF; atqui quadratum IG, maius eſt rectãgulo IBF, eſt enim maius quadrato dimidiæ IO, ergo & recta IG, ſiue quæcunque alia ſit intercepta, media inter AB, BE maior erit.

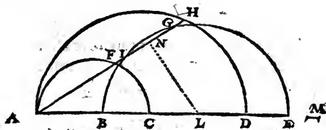
Quod ſi AB, DE fuerint æquales, pragmatia & determinatio obuiæ ſunt & faciles, erunt enim IG, BF æquales, quare iure omittitur hic caſus.

Reſtat caſus in quo DE maior eſt quam AB. repetatur itaque eà figura, ſintque oblati quales iſthic ſemicirculi AFE, BGD. & quoniam illic oſtenſæ ſunt IH, GF æquales, facta AC ipſi DE æquali, erunt quoque HF, IG æquales, quomodo autem intercipienda ſit recta HF, æqualis datæ, ad punctum B pertinens, ibidem oſtenſum eſt: quare pro huius caſus quum factione, tum determinatione eo recurratur.

Secent ſe iam ſemicirculi oblati, & tum recta intercipienda, vel ad angulum ſegmenti communis vtrique ſemicirculo, pertinere poteſt, vel ad reliquum: ſi hoc,

vel recta data terminanda est extra vtrumque, vel alterum tantum, vel intra segmentum vtrique commune tota continetur.

Sint igitur primum circuli sese secantes AF C, BIGE. sitque recta data M, intercipienda extra vtriusque peripheriam cauã, vel inter vtriúsque peripheriam conuexam, pertineátque ad angulum A. oportet autem datam rectam non maiorem esse tangentis segmento ab angulo A, intercepto inter punctum contingentiæ in peripheria BIGE, & conuexum AFC peripheriam. sit factum, intercepta nempe recta FI æqualis datæ M, & ad angulum A pertinens. sintque æquales BC, DE, & ducatur semicirculus AHD, & secet recta AFI circumferentias BGE, AHD, in punctis I, G, H. eruntque primum rectæ FI, GH æquales. nam si a centro L, circuli, BIGE, ducatur perpendicularis LN, in rectam IG, erit vt CL ad LD, ita FN ad NH. & propterea FN, NH æquales. atqui, NI, NG quoque æquales sunt. ergo & reliquæ FI, GH. dico iam esse aggregatum AF in AD, FI vel, HG in CD. ad aggregatum FI vel GH quadrati, & rectanguli AB in AE, vt AC ad AF.



Est enim AD ad AH, vt AC ad AF. & rectangulum AC in AH, æquale rectangulo AF in AD. & rectangulum

AB in AE, æquale rectangulo AG in AI. ſed aggregatum rectangulorum AC in AH, & HG vel FI in CD, eſt æquale aggregato GH vel FI in AD & AG in AC. (eſt enim AH in AC, æquale rectangulis AG in AC, & GH in AC.) & aggregatum rectanguli GAI, & quadrati GH, vel FI, eſt æquale aggregato AH in GH vel FI, & AF in AG. (eſt enim AI in AG, æquale rectangulis AF in AG, & FI in AG.) ſed GH vel FI in AD, ad GH in AH, eſt vt AD ad AH (id eſt AC ad AF. & AG in AC, ad AG in AF, eſt vt AC ad AF. ergo aggregatum GH in AD. & AC in AG, id eſt AC in AH, vel AF in AD & HG in CD,) ad aggregatum quadrati GH, vel FI, & rectanguli GAI, id eſt EAB, eſt vt AC ad AF, quod erat demonſtrandum. dabitur igitur AF.

Eſſe autem FI minorem ſegmento tangentis dicto, ſic docetur: eſt enim tota tangens, maior tota AI, & ſegmentum tangentis intra circulum AFC, minus ſegmento AF. ergo reliquum tangentis, reliquo ſegmento FI, maius erit.

Si extra alterum tantum datorum ſemicirculorum, terminanda eſt data recta, erit illud, vel extra circulum ad cuius angulum pertinere debet, vel extra reliquum, ſi prius, vel tota continebitur intra reliquum circulum, vel pars tantum. hoc autem vt in proxima præcedente figura, recta FG, ad angulum A pertinens.

Repetatur itaque eius conſtructio. ſitque interpoſita recta FG, æqualis datæ, ad angulum A pertinens. eſt autem hæc non minor ſegmento tangentis circulum BGE, ab angulo A eductæ, inter punctū cōtactus, & conuexam circuli AFC peripheriam comprehenſo: nam du-

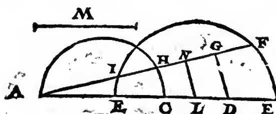
plũm illius ſegmẽti minus eſt ipſa, FH, ergo eius dimidium minus ipſa, FN, & proinde multo minus ipſa FG, nec maior, ſegmento rectæ ab angulo A eductæ per cõmunes circulorum ſectiones, (ſunt enim illæ in eadem recta linea cum A puncto, ſi quidem FI, GH, ſemper ſunt æquales, vt oſtenſum eſt.) inter conuexam circuli ad cuius angulum pertinere debet, & reliqui cauam peripheriam intercepto. erit iam aggregatum AD in AF, CD in FG vel IH, (ex præmiſſis enim ſunt FG, IH æquales) ad aggregatum rectanguli EAB, & quadrati FG, vt AC ad AF.

Eſt enim AD ad AH, vt AC ad AF. & rectangulum AD in AF, ęquale rectangulo AH in AC, & aggregatum AC in AH, & CD in FG, æquale eſt aggregato FG, vel IH in AD, & AI in AC: aggregatum autem rectanguli EAB, id eſt GAI, & quadrati FG vel IH, æquale eſt aggregato AI in AF, AI in FG, & quadrati ipſius FG, vel IH, ſed quadratum IH vel FG, cum rectangulo AI in IH, æquale eſt rectangulo IH in HA. ergo aggregatum GAI, vel FAB & quadrati FG. æquale eſt aggregato IH in HA, & AI in AF. eſt autem IH in AD, ad IH in HA, vt AD ad HA, vel AC ad AF. & AI in AC ad AI in AF, vt AC ad AF. ergo aggregatum IH in AD, AI in AC, ad aggregatum IH in HA, & AI in AF, eſt vt AC ad AF, id eſt vt oſtenſum eſt, aggregatum AD in AF, & CD in FG, ad aggregatum rectanguli EAB, & quadrati FG, eſt vt AC ad AF. quod erat demonſtrãdum: data igitur FG, dabitur & AF.

Terminenda ſit iam data recta vtroque circulo, ita vt tota ſit extra eum, ad cuius angulum pertinere debet, ſed reliquo tota includatur.

Sint igitur circuli ſeſe ſecantes, AHC, BIFE. rectaque

data M, quæ ſegmẽto baſeos alterius, (ad cuius nimirum angulũ non pertinet) reliquo a ſegmẽto communi, non maior eſſe debet. ſit ducta recta AF, ſecans circumferentias datas, in punctis I, H, F. ſitque HF rectæ datæ M, æqualis, & fiat ipſi BC æqualis DE, ducaturque perpendicularis DG, in rectam AF. eruntque primum rectæ IH, GF, æquales. nam a centro L, circuli BIF E, ducatur alia, in eandem perpendicularis quæ ſit LN. erunt NH, NG, itemque NI, NF, æquales, quare & reliquæ GF, IH. dico iam aggregatum AC in HF, AC in AI, AD in HF, eſſe ad BA in AE, vt recta AD, ad AI rectam.



Eſt enim aggregatum AC in AI, AC in HF, vel IG, (ſunt enim æquales, quia IH, GF, æquales ſũt, vt oſtenſum eſt.) æquale AC in AG, & AC in AG, æquale AH in AD (eſt enim vt AD ad AG, ita AC ad AH.) ſed aggregatum AD in AH, AD in HF, eſt AD in AF. eſt autem AD in AF ad AF in AI, (id eſt EAB) vt AD ad AI. ergo aggregatum cõpoſitæ ex AC & AD in HF, & AC in AI, eſt ad EAB, vt AD ad AI. dabitur igitur AI.

Eſt autem HF minor quam CE, quoniam CD maior eſt quam HG, & BC quam IH. (nam tota AC, maior eſt tota AH, & AB pars, minor parte AI, ergo reliqua BC, reliqua IH maior erit.) & propterea BD, maior quam IG, id eſt ex conſtructione CE maior quam HF.

Quod ſi data recta, tota intra circulum ad cuius an-

gulum pertinere debet, terminatur, erit vel tota extra reliquum, vel pars tantum. atque horum duorum casuum, eadem est operatio, & determinatio, quæ in antepenultimo, & penultimo proxime præcedentibus. sunt enim illic, in circulis AHD, BIGE, (quales hi casus requirunt) rectæ GH, IH, rectis FI, FG, æquales. quare eo recurratur.

Si recta data spatio vtrique semicirculo communi, includenda est, vt in superiori figura recta IH, ad angulũ A pertinens, oportebit rectam datam M, communi basium intersegmento, non maiorem esse.

Repetatur itaque figura proxime præcedens, & sit factum. eritque aggregatum AD in AH, & IH in AC, ad rectangulũ AB in AC, vt AE ad AI. est enim aggregatũ AD in AH, IH in AC, æquale aggregato CD in AH, & AC in compositam ex AH & IH vel GF. sed rectangulum CD in AH, æquale est rectangulo AC in HG. (sunt enim proportionales CD, HG, & AC, AH.) ergo aggregatum AD in AH, & IH in AC, æquale est aggregato AC in HG, & AC in compositam ex AH, GF, id est rectangulo ex AC in AF. sed rectangulum AC in AF, ad rectangulum AC in AB, est vt AF ad AB, id est AE ad AI. ergo aggregatum rectãgulorũ AD in AH, IH in AC, id est AD in AI, AD in IH, IH in AC, est ad rectãgulum AB in AC, vt AE ad AI. quod erat demonstrandum. data itaque IH, dabitur & AI. determinatio ostensa est, in casu proxime superiori.

Si ad angulum segmenti communis vtrique semicirculo, pertinet data recta: poterit tota terminari intra, extraue circulum ad cuius angulum pertinere debet, vel

partim extra, partim intra eundem. si primum, debet data recta non maior esse, segmento baseos semicirculi intra quem continetur, reliquo a communi intersegmento. sint itaque dati semicirculi sese intersecantes, ADLB, MDFC, dataque recta Z. & sit ducta recta MLF habens segmentum LF, æquale datæ Z. fiat ipsi BC æqualis GA, & producatur FLM quantumlibet in H, eique perpendicularis sit GH. & ex centro E circuli ADB, eidem quoque perpendicularis sit EI. erunt primum HK, LF æquales, sunt enim GE, EC. æquales ex constructione. & EM ad MI, vt MC ad MF, & componendo EC ad IF, vt ME ad MI, id est EG ad IH. & permutando EG ad EC, vt IH ad IF. sunt autem EG, EC æquales, ergo & IH, IF. at IK, IL æquales quoque sunt, ergo & reliquæ HK, LF. dico iam differentiam aggregati rectangulorum GM in ML, GM in LF, & rectanguli MC in LF, esse ad rectangulum AM in MC, vt MB ad ML.

Est enim GM in MF (id est GM in ML, & GM in LF.) æquale rectangulo HM in MC. (est enim vt MC ad MF, ita MG ad MH.) sed HM in MC, minus LF in MC, est KM in MC, atqui KM in MC, est ad AM in MC, vt KM ad AM, id est MB ad ML. ergo differentia aggregati re-

ctangulorum GM in ML, GM in LF, & rectanguli MC in LF, est ad rectangulũ AM in MC, vt MB ad ML, quod erat demonstrandum. data itaque LF, dabitur & ML.

Est autem LF minor quam BC. quoniam tota MF, tota MC minor est, at ML maior quam MB, ergo reliqua LF, reliqua BC, minor. quod si punctum M cadat in E centrum, tum erunt MB, ML æquales, & remanebit similiter LF minor quam BC. at si M punctum vltra centrum E ceciderit, tum ductis perpendicularibus ad puncta L, F, in ipsam LF rectam, ostendetur segmentum ipsius BC dictis perpendicularibus comprehensum, esse maius ipsa LF recta, ac proinde totam BC multo maiorem esse.

Sit iam data recta, tota extra circulum ad cuius angulum pertinere debet, terminanda, & inclinanda in partes dicti anguli, ita vt sit citra communem semicirculorum, intersectionem: in hoc casu data recta, minor esse debet media proportionali, inter segmenta baseos semicirculi, in cuius caua peripheria terminatur.

Sint igitur quales quæruntur circuli AIC, BKD. dataque recta Z. & sit factum, ducta nempe recta KIC, habens segmentum KI, æquale datæ Z. fiant vt prius AB, DF æquales. & ducatur perpendicularis AI, in rectam KC. tum EL (ex E, centro circuli BKD.) & FG in eandem quoque productã in H punctũ, in circumferẽtia BHD, perpendiculares. erunt primum KI, GH æquales, est enim AC ad CI, vt CE ad CL, & componendo, permutandoque AE ad IL, vt CE ad CL, id est EF ad LG. & iterum permutando AE ad EF, vt IL ad LG. sunt autem AE, EF, æquales. ergo & IL, LG æquales quoque erunt.

erunt. atqui KL, LH, æquales sunt, ergo & reliquæ KI, GH. Iam dico aggregatum KI in CF, CF in CI, KI in AC, esse ad differentiam BC in CD, & KI quadrati, vt AC ad CI.

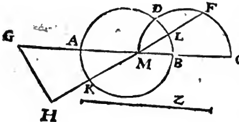
Est enim CF in CI æquale CG in CA. (nã vt CF ad CA, ita CG ad CI.) & aggregatũ CG in CA, KI vel GH in CA, est CH in CA. ergo KI in CF, CF in CI, & AC in KI simul, æqualia sunt duobus, KI in CF, & CH in CA : at KC in CH, id est BC in CD, minus KI quadrato, est aggregatum IC in CH, & KI in CG. est autem KI in CF, ad KI in CG, vt CF ad CG, & CH in CA, ad IC in CH, vt CA ad CI, id est CF ad CG. ergo aggregatum KI in CF, CH in CA, id est KI in CF, CF in CI, & KI in AC, est ad aggregatum KI in CG, IC in CH, (id est differentiam BC in CD, & KI quadrati) vt AC ad IC: quod erat demonstrandum. data itaque KI, dabitur & IC.

Determinatio manifesta est: nam quadratum mediæ proportionalis inter BC, CD, æquale est rectangulo sub KC, CH, hoc autem quadrato KI maius: ergo & dicta media proportionalis, ipsa KI maior erit.

Sed vlterius procurrat recta intercipienda, & caua vtriusque peripheria, citra, vltraque semicirculorum cõmunes intersectiones finienda sit, qualis in figura pro-

xime antepenultima, recta KF.

Repetatur eiusdem figuræ constructio, sitque KF interposita, rectæ datæ Z æqualis, quæ quidem maior esse non debet recta AC, nec minor recta, per alterā sectionum, & dictum angulum transeunte, iisdem circumferentijs terminata. erit igitur differētia GC in KF, & GM in MF, ad differentiam KF quadrati, & MB in MA, vt MC ad MF. Est enim GC in KF, æquale rectangulis GM in KF, & MC in KF, & GM in KF æquale est rectāgulis GM in MF, i. HM in MC, & GM in Mk. atqui differētia aggregati HM in MC, GM in Mk, MC in KF, & HM in MC, est aggregatum GM in Mk, & MC in kF, differentia vero KF vel HL quadrati, & ML in Mk, est aggregatum KF vel HL in HM, & ML in MF. (vt post ostendetur) & est aggregatum GM in kM, MC in kF, vel HL, æquale aggregato GM in KM, MC in HM, MC in ML, & MC in HM æquale GM in MF, erunt ergo GM in KM, MC in KF, æqualia GM in kM, GM in MF, (id est GM in KF.) & MC in ML. atqui GM in kF, ad KF in HM, est vt GM ad HM. & MC in ML, ad ML in MF, est vt MC ad MF (id est GM ad HM) ergo & aggregatum GM in KF, MC in ML (id est vt ostensum est, differentia GC in kF, & GM in MF.) est ad aggregatum kF in HM, ML in MF. (id est ad differentiam kF quadrati, & BM in MA.) vt MC ad MF. quod erat demonstrandum, data itaque Z, dabitur & MF.



Esse autem differentiam kF quadrati & rectāguli MB

in MA, id est ML in MK, æquale aggregato KF in HM, & ML in MF, sic ostenditur, est KF, vel HL quadratum, æquale rectangulis ML in HL, & HM in HL vel KF. sed L:M in HL, minus ML in MK, est ML in MF. (sunt enim æquales HK, LF.) ergo differentia KF quadrati, & rectanguli MB in MA, est aggregatum KF in HM, & ML in MF.

Est autem KF ipsa AC minor, nam LF minor est quam BC, vt supra ostensum est, & KL ipsa AB non maior, ergo tota KF, tota AC minor erit. maior vero est eadem, recta per alteram sectionum, & designatum angulum transeunte, dictis peripherijs siue circulo ADB inclusa, est enim KL recta, ea semper maior, nisi punctum M in centrum circuli AKB cadat, siquidem angulus LMB, minor est angulo DMB.

Sin autem data recta, caua vtriusque circuli peripheria claudenda, citra communes vtriusque sectiones interferenda fuerit, qualis in proxime antepenultima figura recta IH, talis institui potest analysis, vnde eruetur quæsitum.

Repetatur dicta figura: eritque differentia rectanguli AC in IH & spatij quo differũt CF in IH, CF in CH, (i. CF in CI.) ad rectangulum BC in CD, vt AC ad CH. Est enim vt supra rectãgulum CF in CI, æquale rectãgulo AC in CG. atqui AC in IH, minus

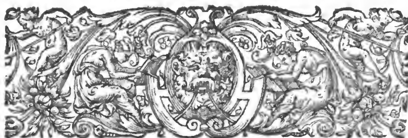
AC in CG, eſt æquale rectangulo AC in KC. eſt autem AC in kC, ad kC in CH, id eſt BC in CD, vt AC ad CH. ergo differentia rectangulorum AC in, IH, & CF in CI, (id eſt CF in IH, minus CF in CH) eſt ad rectangulum BC in CD, vt AC ad CH: data itaque IH: dabitur & CH. debet autem data recta nõ maior eſſe recta per alteram ſectionum & deſignatum angulum tranſeunte, ijſdem peripherijs terminata, nam vt prius, ea maior eſt ipſa kCH niſi puncta, C, E, coierint. nec minor media proportionali inter BC, CD, quoniam quadratum HI, maius eſt rectangulo HCK.

Ne mihi hic obijce περιεργίαν, ſi caſus aliquos ſingulares alioqui, in plures diuiſi id enim factum quia reſoluendo in diuerſas incidi æquationes. cæterum methodum generalem regrediendi ad eorundem omnium σύνθεσις, harumque demonſtrationes, diſcat analyſta ex primo meo præmiſſo lemmate.

ALEXANDRI ANDERSONI.

ABERDONENSIS VARIORVM PROBLEMATVM

Practice.



NOBILISSIMO,

PRVDENTISSIMO, AC OPTIMO, DOMINO SVO, DOMINO MARTINO RVZÉ, EQVITI AVRATO, Domino à BEAVLIEV, Longiumeau, Champeaux, Prezay, &c. Ordinum equeſtrium Regis Chriſtianiſſimi magno quæſtori, Metallifodinarum Galliæ magno præfecto, eidémque Regiæ Mauſtati à penitioribus conſilijs, & a ſecretis primo.

SI generis nobilitas non niſi virtute perficitur, quidni virorum omnium nobiliſſimum te dixerim? (vir omni nobilitatis & virtutum genere ornatiſſime) ſi fœlices, non niſi dies vltima, & extremum ſenium arguunt, cur non fœliciſſimum? pietatem, quinquaginta & amplius anni, pace belloque tranſacti, teſtentur: quibus nec imminentia pericula, publica ſiue priuata, nec effrenis licentia militaris, & impia caſtra, ne vel diem vnum, ſacroſanctam ἱερουργίαν, *tibi (niſi ægro fortaſſe) interrupêre. fidem in principem & patriã, bellorum ciuilium incendia loquantur: quibus miſerè deformatâ, & internecioni*

proximâ hâc republicâ, tu non desperata cum pluribus salute, illos deseruisti, sed spe rebus afflictis maiore, virtute tantis cladibus superiore, ijs continenter adfuisti. fortitudinem, pericula quæ fortiter adijsti, ac superasti: magnanimitatem, labores quos constanter pertulisti: prudentiam, suprema munia quibus summa cum laude functus es, prædicent. anteactæ sic vitæ status inconcussus, debitaque ei gloria, fœlicem te proclament. Ego comitatem & benignitatem erga me tuam hic memoro, quæ tantæ sunt, vt & hoc ipso quoque generosum te, ac magnificum testeris. nam vt virtus omnis in arcta est, & aduersa; ita comitas in tenues, benignitas in egenos, maxime splendescit. sed in eo, quum generosissimus & eximiæ indolis pronepos, ANTONIVS RVRE' *ab Effiat (proles haud inficienda parenti) στοργὴν parentalem partim persensit, quod animum ad honesta natum, bonis etiam artibus instrui volueris, quo fremius ac certius in arduo hoc & accliui virtutis tramite, vestigia ponat: tum ego hoc potissimum munere, quicquid siue ad famam, siue ad fœlicitatem sperare potui, à te benignè concessum percepi. licet tuo magis exemplo, quam vllis aliorum præceptis siue monitis, per hunc paucis tritum callem ducas, ducemque ille suum adeo solicitè insequitur, vt iam in ipso renascentem te, positâ illâ senili exuuie, & princeps & patria gestientes videant. sed vt radios à sole promanentes, densiora corpora repercutiunt, non eius lumini augendo, sed sibimet illustrando: sic ex hac benefactorum commemoratione, licet gloriæ tuæ accedere nihil possit, tamen vt ingratitudinis næuus omnis mihi detergeatur, silere non decet. Imo vero, signis & indicijs, quamuis (pro facultate) leuibus, testari conuenit. Accipe*

cipe

cipe igitur (vir nobilissime) hunc qualemcunque laborem, memoriæ in tot beneficia pertinacis, indicem ac testem: quem ea animi alacritate tibi offero, quâ illum, meque tibi acceptum ac gratum cupio, & spero. Vale. Lutetiæ Parisiorum. VI. Kalend. Martias.

Tibi vt plurimum deuinctus,
ita in perpetuum deuotus,

ALEXANDER ANDERSONVS.

F

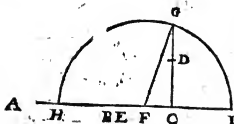
PROBLEMA I.

Data composita ex media, & altera extremarum, è serie trium proportionalium, tum reliqua proportionali, discernere tres proportionales.

siue,

Data summa trium laterum trianguli rectanguli, & differentia hypotenusæ et baseos, discernere latera.

Sit recta AC composita ex media & vna extremarũ, eique ad angulos rectos CD extrema reliqua, oporteatque discernere proportionales. fiat ipsi CD æqualis CE. & producatur CD, in G, & CG media sit proportionalis inter DC, CA. diuidatúrque CE bifariam in F. & centro F, interuallo FG, ducatur semicirculus H G I, secans rectam AC productam, in punctis H, I, & sit ipsi CI, æqualis CB. dico AB, BC, CD, esse proportionales quæsitas.



Quoniã enim CG, media proportionalis ponitur inter DC, CA, erit CG quadratum æquale rectangulo DCA. ideoque & rectãgulum DCA, rectangulo HCI, æquale, & propterea vt HC ad DC, id est (ex constructione) ad EC, ita AC ad CI, id est ad BC, & conuertendo vt EC ad HC, ita BC ad AC. & diuidendo vt

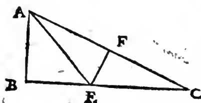
EC ad EH, ita BC, id est HE (sunt enim HB, EC, differentiæ extremarum æquales.) ad BA. & proinde BC vel HE, media proportionalis inter EC vel DC, & AB. quod erat faciendum.

Eodem modo, in triangulo F GC rectangulo, data summa trium laterum, id est rectis HC, CG. & differẽtia hypotenusæ & baseos, id est recta CI, discernetur latus CG. & reliqua vt sequitur.

Problema II.

DAtis trianguli rectanguli, vno latere circa angulum rectum, tum composita ex hypotenusâ, ac reliquo: discernere latera.

Sit datum latus circa angulum rectum AB, composita ex hypotenusa ac reliquo latere, BC, priori ad angulum rectum adiuncta, ducaturque hypotenusa AC, quæ bifariam secetur in F, a recta FE, in eandem perpendiculari, & occurrente basi BC, in E puncto. dico BE esse reliquum latus, & EC hypotenusam.



Ducatur enim recta AE. & quoniam recta AC bifariã secatur a perpẽdiculari EF, erunt latera, EC, EA æqualia, lateraque quæsita BE, EA vel EC, quod erat faciendum.

Problema III.

E serie trium proportionalium, data vna extremarum, tum differentia mediæ ac reliquæ: inuenire proportionales.

Sit primum data maior extremarum AB, differentia mediæ ac minoris CB. rectangulo AB in CB, æquale fiat rectangulum AD in DB. eruntque proportionales quęsitæ AB, DB, DC.



Est enim ex constructione A B ad AD, vt DB ad BC. & conuertẽdo AB ad DB, vt D B ad DC, quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Hinc liquet AB minorem esse non posse, quadruplo ipsius BC: nam diuisa est AB, in D, & rectãgulum ADB, factum æquale rectangulo A B C, maximum autem rectangulum ex segmentis AB, est quadratum dimidij, id est quarta pars quadrati AB.

Sit iam data minor extremarum DC, tum differentia mediæ & maioris AD. fiat rectangulo ADC, æquale rectangulum DB in CB. (dato enim rectangulo sub extremis, & differentia extremarum, inuenire extremas, ostensum est supra (eruntque proportionalis quæsitæ A B, D B. est enim ex constructione AD ad DB, vt CB ad DC. & componendo AB ad DB, vt DB ad DC. quod erat faciendum.

Problema IIII.

D*Ata ex tribus proportionalibus, differentia extremarum, tum ſumma mediæ, & alterius extremæ: diſcernere proportionales.*

Sit AC differentia data, BC ſumma mediæ & alterius extremæ. Fiat vt BA ad BC, ita DA ad DB. dico iam eſſe DA ad DB, vt DB ad DC.

A C D E B

Eſt enim DA ad DB. vt BA ad BC ex conſtructione & permutando DA ad BA, vt DB ad BC. & conuertendo BA ad DA, vt BC ad DB. & diuidendo BD ad DA, vt CD ad DB. & iterum conuertendo DA ad DB, vt DB ad CD, quod erat faciendum.

ΠΟΡΙΣΜΑ.

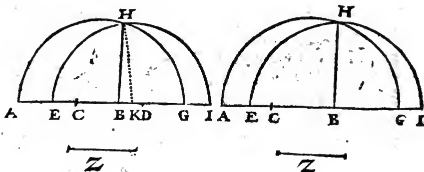
Eadem eſt ratio ſecandi datam rectam infinitam, duobus punctis notatam, ita vt è ſegmentis, datis duobus punctis, inuentoque terminatis, vnius quadratum, ad rectangulum ſub reliquâ & datâ externâ, datam teneat rationem. Nam tum datæ externæ analoga, in data retione, ſemper eſt vna extremarum vnde ſi primo epitagmate, iubeatur data recta ita ſecari, inter data duo puncta; dabitur externæ analoga vna extremarum, & ſegmentum duobus punctis datis comprehenſum, erit ſumma mediæ & alterius extremæ, eique ſatisfaciet primum noſtrum problema: ſin altero epitagmate, iubeatur ita ſecari vt dictum eſt, extra data puncta: erit

ſegmentum datis punctis terminatum, differentia mediæ & alterius extremarum, maioris quidem, cum ſegmentum cuius quadratum quæritur proximo puncto terminandum eſt, at minoris, quum reliquo vlteriori idem terminari iubetur. praxin vide in tertio noſtro problemate.

Problema V.

Datam rectam terminatam ſemel ſectam vtcumque ita denuo ſecare, vt rectangulum ſub ſegmentis quibuſlibet, duobus punctis datis, inuentoque terminatis, æquale ſit rectangulo ſub ſegmento, reliquo puncto dato, inuentoque, terminato, & data externa.

Sit data recta AB, ſecta vtcunque puncto C. data externa Z, quęraturque primum datæ externæ coefficiens, ſegmentum, in quo datum punctum medium non eſt. fiant ipſi Z æquales BG, CD. & ſuper rectam AG deſcribatur ſemicirculus AHG. ducaturque perpendicularis BH, occurrens circumferentiæ iam ductæ in H. & DB bifariam diuiſa in K, centro K, interuallo KH. ducatur ſemicirculus EHI. dico E eſſe punctum quæſitum.



H

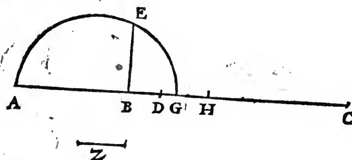
A E C D K B G I

Est enim ex constructione rectangulum ABG, id est ABCD, æquale rectangulo EBI, id est EB, ED. (est enim EK ęqualis ipsi KI, & KD, ipsi KB, ex constructione, ergo & reliquę, vt in prima figura, vel totę vt in secunda, BI, ED, ęquales erunt.) auferatur vtrinque idem commune, CD in EB. relinquentur AE in CD id est Z. & EB in EC æqualia: est igitur, E, punctum quæsitum quod erat faciendum.

Quod si vt in tertia figura, recta data Z, ipsi CB fuerit æqualis, tum constructione vt prius absolutâ, BE, ipsi BH æqualis, problema absoluet: sunt enim EC GI æquales: (quoniam BE, BI, itemque BC, BG, æquales sunt.) Vnde si ex æqualibus, nimirum EB quadrato, & rectangulo AB in BG, vel CB, auferatur idem commune EB in CD, remanebant æqualia AE in CB, & EB in EC. quod erat faciendum.

Secundus autem casus erit quum reliquum segmentum, in quo est datum punctum medium, datæ externæ coefficiens quæritur: Sit itaque AC recta data, secta B puncto. Dataque externa Z. oportet autem differentiam ipsius Z, & BC, non minorem esse duplo eius, quæ potest AB in Z. fiat ipsi Z æqualis BG. ductoque semicirculo AEG, erigatur perpendicularis BE, secās circūferentiā iam ductā in E. tum ita diuidatur GC in H, vt recta

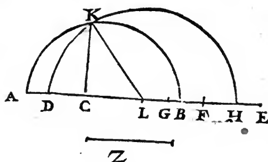
ĉta BE media ſit proportionalis inter eius ſegmēta GH, HC. & ipſi GH, fiat æqualis BD. dico, D, eſſe punctum quæſitum.



Eſt enim ex conſtructione rectangulum ABG, rectangulo GHC æquale, quibus addatur idem cōmune, BGH, & ex aggregato ABG & BGH, vel BG in BD, ex conſtructione, fiet AD in BG id eſt Z, æquale aggregato GHC, & BGH, vel DC in GH ex conſtructione, id eſt BD in DC. eſt igitur D, punctū quæſitum quod erat faciendum.

Tertius caſus erit, quum quæritur intermedium ſegmentum, datę externæ coefficiens.

Sit itaque data recta AB, ſecta puncto C. dataque externa Z, cui ęquales fiant CG, BE. tum ipſi AC ęqualis fiat EF. ducaturque ſemicirculus AKB; & erigatur perpendicularis CK, ſuper rectam AB, occurrens ſemiperipheriæ, in K. tum diuiſa recta CF bifariam in I, centro I, interuallo LK, ducatur circumferētia DKH, dico punctum D, eſſe queſitum.



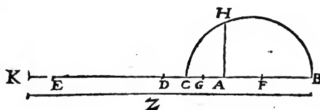
Qnoniã enim LC, LF, ęquales sunt, ex cõstructione, itẽque LD, LH, & totę LA, LE, erunt & reliquę AD, HE ęquales, & propterea quoque DC, FH, ęquales, ac proinde & CH, DF. est autem ex constructione, rectangulum ACB, rectangulo DCH, æquale : & ex æqualibus ablato communi DCB, relinquentur AD in CB, DC, in BH æqualia : quibus, si addatur idem commune AD in DC, vel HE in FH, erit totum ADB, æquale toti DC in BE id est Z. est itaque D, punctum. quæsitum quod erat faciẽdum.

Problema VI.

D*Atam rectam terminatam semel sectam vtcunque, ita aügere, vt rectangulum sub tota aucta, & alterutro segmento cum augmento, æquale sit rectangulo, sub augmento & data externa.*

Sit data AB, secta in F. dataque externa Z. oportet autem ipsius Z excessum supra compositam ex AB, AF, non minorem esse duplo eius, quę potest id quod continetur ipsis BA, FA. fiat AC ipsi AF æqualis : & ducatur semicirculus CHB: tum recta perpendicularis AH, occurrens peripheriæ ductæ in H. sitque KB æqualis ipsi

Z,cuius exceſſus KC,ita diuidatur in D, vt recta AH, media ſit proportionalis inter eius ſegmenta KD, DC. ſitque ipſi DC, æqualis AG. dico G, eſſe punctum quæſitum.



Quoniam enim CA, AF, æquales ſunt, itemque DC, GA, erunt DA, GF æquales. eſt autem ex conſtructione rectangulum CAB, rectangulo CAB, rectangulo CDK, (vel KEC, facta KE, ipſi DC, æquali) æquale, quibus ſi addantur communia GA in GF, GAB, id eſt GA in DB, fient GF in GB, KE id eſt GA in KB, inter ſe æqualia. eſt igitur G, punctum quæſitum quod erat faciendum.

Problema VII.

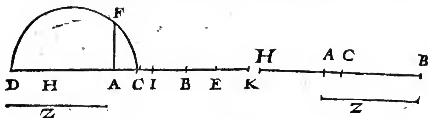
DAtam rectam lineam ſemel ſectam vtcunque ita augere, vt rectangulum ſub tota aucta & augmento, rectangulo ſub alterutro ſegmento cum augmento, & data externa, æquale ſit.

Sit data recta AB, ſecta C puncto, ſitque data externa Z. fiat ipſi Z, æqualis DA. & rectangulo DAC, ſit æquale quadratum AF. ſintque DA, AE, æquales. tum data EB differentia extremarum, & AF media inueniantur pro-

portionales IE, EK. & si AE, ipsa AB, minor fuerit, fiat HA, ęqualis minori EI, vt in prima figura. dico H esse punctum quæsitum.



Est enim rectangulum IEK, rectangulo DAC æquale, ex cõstructione, & rectæ IE, Bk, æquales (est enim EB, differentia extremarum) æqualibus igitur rectangulis, IEk, DAC, addatur commune IE in AF, vel DA, eruntque æqualia IE in Ak, idest, HA in HB, (sunt enim IE, HA æquales, itemque HB, Ak, ex constructione) & HC in DA, idest Z. est itaque H, punctum quæsitum. quod erat faciendum.



Sit iam Z, vel AE, siue DA, maior quam AB, vt in secunda figura, reliquisque vt prius peractis, fiat HA, æqualis maiori extremæ IE: eruntque vt prius rectangula DAC, IEK idest HA in IB, ex constructione æqualia. æquales quoque sunt rectæ, AI, DH, si quidem DA, AE ponuntur æquales, itemque IE, HA. æqualibus igitur DAC, HA in IB, addatur idem commune HAD, id est HA quadratum, plus HA in AI, erunt tota DA in HC, HA in

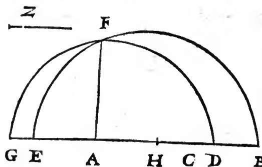
BH inter se æqualia.

Sin autem Z, ipsi AB, æqualis fuerit, vt in tertia figura, fiat rectangulo BAC, æquale quadratum HA, quibus addatur idem commune, HA in AB, eruntque æqualia BH in HA, & HC in AB, quod erat faciendum.

Problema VIII.

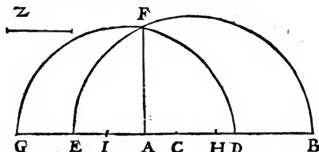
Datam rectam semel sectam vtcunque, ita augere, vt rectangulum sub tota aucta, & data externa, æquale sit rectangulo, sub alterutro segmento cum augmento, & augmento.

Sit recta data AB, secta C puncto, dataque externa Z, cui æquales fiant EA, AH. sitque rectangulo EAB, çquale quadratum AF, tum data AF media, & differentia rectarum AC, AH, differentia extremarum, inueniantur extremæ GA, AD. & si HA ipsa AC minor fuerit, vt in prima figura, fiat GA çqualis minori extremæ dico, G, esse punctum quçsitum.



Est enim rectangulo EAB, çquale rectangulum GAD, ex constructione, addatur vtrique commune EA in GA, eruntque æqualia EA in GB, & GA in ED vel GC (sunt enim GE, CD, inter se æquales, nam HC, ponitur diffe-

rentia extremarum, ergo GA, æqualis ipsis AH, CD simul; & EA, ipsi AH æqualis est ex constructione, vnde relinquitur GE, ipsi CD æqualis, ergo & totæ ED, GC inter se quoque æquales erunt.) est itaque G, punctum quæsitum quod erat faciendum.





At si EA, sine Z, sine AH, vt in secunda figura, maior fuerit ipsa AC, constructione vt prius absoluta, fiat GA æqualis maiori extremæ eruntque iterum rectangula EAB, GAD inter se æqualia, quibus addatur idem commune, GA in EA vel CI, (sunt enim AH, AE, æquales ex constructione, & CH differentia extremarum, cui si æqualis fiat AI, relinquetur EI, AC æquales & totæ EA, CI æquales quoque) fient GB in EA, GA in ED vel GC, (sunt enim AD, GI, æquales, & EA, IC, vnde & totæ ED, GC, æquales quoque erunt) æqualia quod erat faciendum.

Quod si data externa Z, æqualis fuerit ipsi AC segmento, fiat ractangulo CAB, ęquale quadratum GA. quibus addatur idem commune CA in GA, fientque

CA in GB, GC in GA inter se æqualia. & G punctum quęsitum, quod erat faciendum.

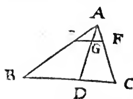
ΠΟ'ΡΙΣΜΑ.

Eadem erit operatio, si iubeatur data vt prius recta, ita secari, vt rectangulum sub duobus segmentis quibuscunque, datis duobus punctis, inuentoque contentis, ad rectangulum, sub segmento, reliquo puncto dato, inuentoque comprehenso, & data externa, datam teneat rationem: tum enim datæ externę, in data ratione analoga, est illa, quam nos hic posuimus externam, in ratione æqualitatis.

LEMMA.

SI a vertice trianguli, ducatur recta vtcunque in basin, secabit ea, rectas omnes triangulo inscriptas, & basi parallelas, proportionaliter basi.

Sit triangulum ABC. rectaque inscripta basi parallela EF. & recta à vertice in basin AD, secans basi parallelam EF, in G. dico esse EG ad Gf, vt BD ad DC.

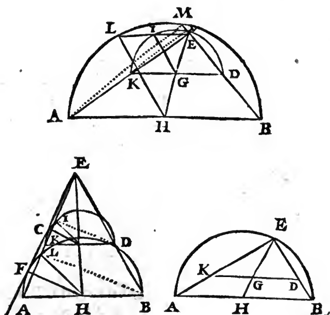


Sunt enim DC ad GF, BD ad EG, vt DA ad GA. & permutando, DC ad DB, vt Gf ad EG. quod erat demonstrandum.

LEMMA.

SI per extremitates diametrorum parallelarum, circulorum inæqualium, duæ rectæ lineæ transeuntes, in eodem pũcto coierint, rectæ a dicto puncto eductæ, ad datos circulos, vel simul vttumque tangent, vel similia auferent segmenta.

Sint duo circuli inęquales, ſuper diametros parallelas AHB, KGD, quarum extrema AK, BD, rectæ AKE, BDE, connectentes, coeant in puncto E. dico rectas omnes à puncto E eductas, ad dictos circulos, eoſdem, vel ſimul tangere, vel ab ijſdem ſimilia auferre ſegmenta.



Tangat primum recta ECF, in ſecunda figura circulum KCD, in C puncto, & ducatur recta EG, quę per H, alterius circuli centrum, tranſibit. (per precedens lemma.) ſintque ad rectam ECF, perpendiculares, GC, HF. quoniam igitur eſt vt EG ad EH, ita CG ſemidiameter, ad AH ſemidiametrum, atqui vt EG ad EH, ita CG ad FH ex conſtructione. eſt ergo FH quoque ſemidiameter

ter

ter circuli AFB. & EF, perpendicularis ipſi FH, tanget circulum AFB. Iam ſecet recta EIK LA, circulos eoſdē, (nam ſi alterum ſecat, ſecabit & reliquum, ſiquidem vt demonſtratum eſt, ſi vnum tangit, tangit & reliquum.) anferátque ſegmenta KI, AL, quæ dico ſimilia. eſt enim vt prius, EG ad EH, vt KG ad AH, parallelæ igitur KG, AH, IG, HL, & anguli in centris KGI, AHL inter ſe æquales. rectæ igitur ab E puncto eductæ, vel ſimul vtrũque tangunt, vel ſimilia auferunt ſegmenta, quod erat demonſtrandum.

In prima figura, eſt quoque EG ad EH, vt KG ad AH, id eſt IG ad LH, quare IG, LH parallelæ, & anguli in centris IGE, LHE æquales. vnde patet propoſitum.

In tertia figura, vbi angulus ad circumferentiam AEB, rectus eſt, eodem modo oſtendetur angulos in centris eſſe æquales: eſt enim EG ad EH, vt minor diameter ad maiorem. Si ergo per extremitates diametrorum parallelarum, &c. quod erat demonſtrandum.

COROLLARIVM.

Ex prioribus figuris patet, ſiquidem angulus E fuerit obtuſus, vt in prima figura, ipſum intra circulos cadere: quoniam perpendiculares AM, KN, cadunt extra triangula AEB, KED. è contra, ſi E angulus fuerit, acutus, cadet extra dictos circulos, vt in ſecunda figura, nã perpēdiculares DI, BL cadunt intra eadē triangula. ſi denique angulus E, fuerit rectus, erit ad ſemicirculorum peripherias, vt in tertia.

Problema IX.

Datam rectam terminatam, semel sectam vtcunque, alibi iterum secare, vt rectangulum sub duobus segmentis ad punctum quæsitum, duoque qualibet data terminatis, ad quadratum segmenti reliqui, eodem quæsito, datoque reliquo, comprehensi, datam teneat rationem.

Sit data recta AB, secta C puncto, iterumque secanda in puncto, quod sit R, vt (primo) rectangulũ ARC, ad quadratum RB, datam teneat rationem AB ad BD. sit BD perpendicularis ipsi AB, in puncto B. ducaturque recta AD, tum continuetur recta BD, in G, vt sit BG ipsi BC æqualis. & ducatur recta GC, quæ producatur, donec occurrat rectæ AD, in E puncto, & sit diuisa GD bifariam in F, ductaque recta EF, tum à puncto B, in rectam EF, ducatur perpendicularis BI, protracta vtrinque quantumlibet, fiatque ipsi BI æqualis IK. & centro F, interuallo FG ductum semicirculum, tangat recta EQ, in Q puncto, producta donec occurrat rectæ BIK protensæ in H. (nam quoniam hic ponimus rationem maioris inæqualitatis, rectamque AB maiorem quam BD, erit angulus GED acutus: est enim ACE semirectus & CAE semirecto minor, proptereaque CEA recto maior, & reliquus CED recto minor, ac proinde punctum E, cadet extra semicirculum GQD) cum rectangulo BHK, fiat æquale quadratũ HM. & rectæ HQM, in puncto M, perpendicularis sit MN, occurrens rectæ EF, in N puncto, per quod, ipsi GBD parallela ducatur ORNP, secans rectas GCE, BCA, DEA, in punctis O, R, P, dico R esse punctum quæsitũ:

esse namque ARC rectangulum, ad BR quadratum, vt AB, ad BD.

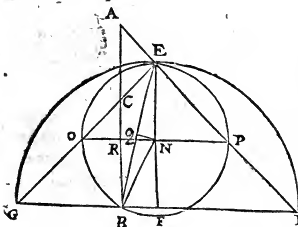
Quoniam enim est rectangulum KHB, quadrato HM æquale, erunt puncta B, k, M, in circulo cuius centrum N punctũ, quemque tangit recta HM, eiusque diameter erit OP, (ex præmisso lemmate) quæ normalis est ad rectam datam AB. erit igitur quadratum RB, rectangulo ORP æquale est autem rectangulum ARC, ad rectangulũ ORP, idest CRP (sunt enim CR, OR æquales quia anguli COR, OCR æquales sunt ex constructione) vt AR ad RP, idest AB ad BD: ergo & rectangulum ARC, ad RB quadratum, est vt AB ad BD. quod erat faciendum.

Sit iam data ratio minoris inequalitatis, id est AB minoris ad BD maiorem. fiatque vt prius BG ipsi BC æqualis. ducanturque rectæ GCE, AED. & diuisa GD bifariam in F, ducatur recta EF tum centro F, interuallo FG, ducatur circulus, GQD. & per puncta B, E, agatur recta EBQ, occurrens circumferentiæ GQD, in Q puncto, a quo, ad centrum F, ducatur recta QF, cui parallela educatur à puncto B, quæ sit BN, occurrens rectæ EF, in N puncto, per quod agatur ORNP recta parallela ipsi GD, occurrẽsque rectis GCE, ACB, AED, in punctis O, R, P. dico

R esse punctum quæsitum. Centro N, interuallo ON vel NP, ducatur circulus OBP, qui per B punctum necessario trãsibit, est enim vt FE ad NE, ita FG ad NO, & ita FQ id est, FG, ad. BN: sunt itaque NO, NB æquales, & circulus ex centro N, interuallo NO vel NP descriptus, transit per punctum B. quoniam iam sunt puncta OBP in circumferentia circuli cuius centrum N, diameter OP, ex præ demonstratis: erit quadratum RB, rectangulo ORP, æquale. est autem rectangulum ARC, ad rectangulum ORP, vel CRP (ex constructione) vt AR, ad RP, id est AB, ad BD. ergo & rectangulum ARC, ad quadratum RB, erit quoque vt AB ad BD. quod erat faciendum.

Sed sit data ratio æqualitatis, eademque repetatur constructio quæ prius, nisi quod ducta recta BE, diuidatur bifariam in Q. ducaturque recta QN, ipsi BE perpendicularis, occurrens rectæ EF, in N, & per punctum N ducatur ORNP, parallela ipsi GBFD, secansque rectas

GOCE, ACRB, AEPD, in punctis O, R, P. dico adhuc R esse punctum quæsitum.



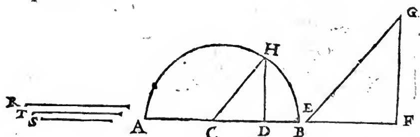
Sunt enim ex constructione FN, NB æquales, & ex præmisso lemmate puncta OBP in circulo cuius diameter OP, eiusque centrum N. & quadratum RB, rectangulo ORP æquale. est autem rectangulum ARC, rectangulo ORD æquale, nam latera CR, RO, æqualia sunt quia anguli ROC, COR sunt æquales, itemque rectæ AR, RP æquales quia AB, BD æquales sunt ex constructione. ergo rectangulum ARC, quadrato RB æquale est, quod erat faciendum.

Atque hic primus casus esto, quum nimirum secandum est alterutrum segmentorum datorum, ita vt rectangulum sub segmentis, duobus datis proximis punctis & quæsito terminatis, comprehensum, ad reliqui segmenti eodem quæsito, reliquoque extremo puncto dato terminati, quadratum, datam teneat rationem.

Secundus casus erit, quum alterum datorum segmentorum ita secandum est, vt rectangulum sub extremis segmentis quæsitis, ad quadratum intermedij segmenti,

datam teneat rationem, quod quidem facillime sic absoluetur.

Sit data recta AB, secta C puncto, iterumque secanda in D, vt rectangulum ADB, ad quadratum DC, datam teneat rationem R ad S. inter R & S media sit proportionalis T. & si per AB diametrum semicirculus describatur AHB, tum componantur ad angulum rectum EF, FG, ipsis R, T, æquales iungaturque recta EG. & angulo FEG, fiat æqualis BCH, rectaque CH occurrat circumferentiæ, in H puncto, a quo descendat perpendicularis in basin ACB eandem secans in D puncto quod dico esse quæsitum.



Quoniam enim ex constructione est GF ad FE, id est R ad T, vt HD ad DC, erit quoque vt R quadratum ad T quadratum, ita HD quadratum ad DC quadratum, idest ita ADB rectangulum ad DC quadratum, sed vt R quadratum ad T quadratum, ita R recta ad S rectam, ergo vt R recta ad S rectam, ita ADB rectãgulum, ad DC quadratum, quod erat faciendum.

Tertius casus est, quum alterum segmentum datum ita secandum est, vt rectangulum sub eiusdem partibus, ad quadratum reliqui totius segmenti, datam teneat rationem. quod pari cũ priore facilitatę perficietur, determinatio clarius patebit post demonstrationem sequentis operationis.

Sit igitur data recta AB, secta C puncto, eiusque segmentum alterum vt AC, secandũ in D, vt rectangulum ADC, ad quadratum DB, datam teneat rationem R ad S. super AC ducatur semicirculus, tum inter R & S media proportionalis sit T. & fiat vt R & T, ita CI ad CB, quæ angulum rectum contineant BCI. ducaturque recta BI, secans circumferentiam iam ductam, in punctis K, F, a quibus demittantur perpendiculares KD, FE, in basin AB: & vtrumvis punctum E, D, problemati satisfaciet.

Est enim vt R ad T, ita CI ad CB, id est KD ad DB, & FE ad EB. & vt R quadratum, ad T quadratum, id est R ad S, ita KD quadratum, ad DB quadratum, & ita FE quadratum, ad EB quadratum, id est ita ADC rectangulum, ad DB quadratum, & ita AEC rectangulum, ad EB quadratum, quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Hinc sequitur, si ducatur recta BH, tangens semicirculum AFHKC in H puncto, & demittatur perpendicularis HL in basin AC, rationem HL quadrati, id est rectanguli ALC, ad quadratum LB, esse singularem & maximam. quare rationem datam R ad S, non maio-

rem esse debere, dupla eius quæ est HL ad LB, vel MC, ad. CB si nimirum recta CI producta, secet tangentẽ in M. est enim maior ratio MC quadrati, ad CB quadratum, quam IC quadrati ad CB quadratum.

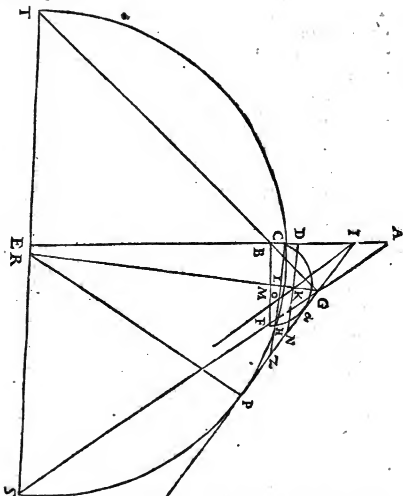
Problema X.

DAtam rectam terminatam semel vtcunque sectam, ita augere, vt rectangulum sub tota aucta & augmento, ad quadratum compositæ ex augmento & intersegmento, datam teneat rationem.

Sit recta data AB, secta vtcumque puncto C, ratioque data AB ad BF maioris primum inęqualitis, quæ ad angulum rectum conueniant augendaque sit AB, vel producenda in E, vt rectangulum AEB, ad quadratum EC, datam teneat rationem AB ad Bf. ducatur recta AF, producaturque quantumlibet, & diuidatur angulus ABF rectus æqualiter per rectam BG, productam quoque quantumlibet, & occurrentem rectæ AF in G puncto, tum secetur recta BF bifariam in M, & agatur recta GM, protensa vtcunque, & centro M, interuallo MB, vel MF, ducatur semicirculus B α F, quem tangat in α recta GA (est namque G punctum extra semicirculum B α F, vt hactenus ostensum est.) producta quoque quantumlibet, tum à puncto C, ad rectam GM ducatnr perpendicularis CL, producta donec secet tangentem G α, in Z puncto, & ipsi CL fiat æqualis LH. & rectangulo CZH sit æquale quadratum ZP, in recta tangente G α ZP. tum à puncto P ducatur PR perpendicularis ipsi GAZP, secansque rectam GMR in R puncto, & à pun to

R ad

R ad AB productam ducatur perpendicularis RE, ſecans rectas GB, GF productas, in punctis T, S. dico E eſſe punctum quæſitum.



Centro enim R, internallo RS, vel RT, ducatur ſemicirculus TPS, qui tanget rectam GαZP, in P puncto, ex præmiſſo lemmate. & eſt rectę ZP quadratum, ęqua-

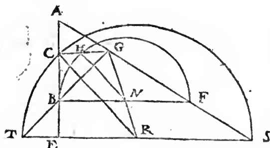
le rectangulo CZH, ex constructione. sunt igitur puncta C,H,P in circulo TCHPS & RET, ipsi EBC perpendicularis. erit igitur quadratum EC, æquale rectangulo TES, idest BES, (est enim angulus TBE semirectus ex constructione, ergo & reliquus BTE illi æqualis siquidem BET rectus est, quare BE, ET æquales) estautem rectangulum BEA, ad rectangulum BES, vt EA ad ES, id est AB ad BF, ergo & rectangulum BEA ad quadratum EC, est vt AB ad BF. quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Hinc patet, si recta G A producatur, donec occurrat rectæ AB, in I, & diuidatur recta CZ, bifariam in O, ducaturque IO, secans rectam GM in K, & acta demum DKN ipsi CZ parallela, & secante rectas IC, GM, IG, in punctis D, K, N, esse DK, KN æquales, & lineas à punctis inter A, & D eductas, rectisque ID, IG, terminatas, & in GM perpendiculares, inæqualiter secari à recta GM, maiusque segmentum esse inter ID, GK rectas, cui æquale absumptum vltra GK, excurret vltra tangentem Gz: ac propterea in illo casu, problema impossibile esse. est itaque hic singularis & maxima ratio BD ad DA, id est punctum datum C, data ratione AB ad BF, non debet assignari inter D, & A.

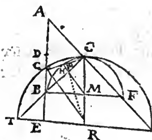
Sit iam data ratio AB ad BF minoris inęqualitatis, reliquis vt supra peractis, erit angulus BGF obtusus, vt ostensum est, cadetque intra ductos, vt supra semicirculos. sit itaque centro M, interuallo BM, ductus semicirçulos BHF, & a puncto C dato, ad angulum G,

ducta recta CG secans peripheriam BHF, in H puncto, à quo ad M centrum, ducatur recta HM, cui à puncto C, parallela agatur CR, secans rectam GM productam, in R puncto, à quo, ducatur RET, perpendicularis ad AB productam, & cætera vt prius, dico adhuc, punctum E esse quæsitum.



Sunt enim ex præmissis, pũcta T, C, S, in circulo cuius diameter TRS, ad quam perpẽdicularis est CE, ex cõstructione: ergo rectangulum TES idest BES, æquale erit quadrato CE. atqui rectangulum AEB, est ad rectangulum BES, vt AE ad ES, id est AB ad BF. ergo rectangulum AEB ad quadratum EC, erit quoque vt AB ad BF, quod erat faciendum.

Eademque erit & factio, & demonstratio, si ratio offeratur æqualitatis: debet autẽ tum BC, minor esse dimidio ipsius AB, vt ex sequenti schemate perspicere est.



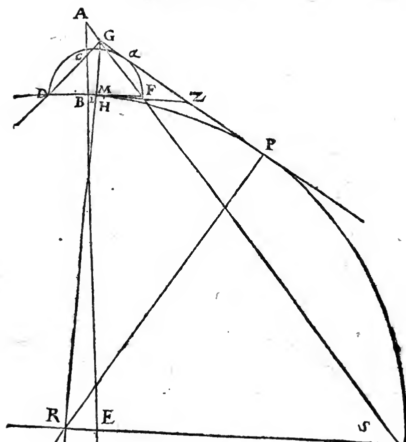
Nam si datum fuerit D punctum medium rectæ AB, recta ducta DG, tangeret circulos BGF, TGS, proptereaque centrum punctorum D, G, in recta GM reperiri non posset. & multo minus si datũ

punctum esset inter D, & A. potest quoque centrum R in hac figura reperiri, si recta CG diuidatur bifariã, a perpendiculari OR.

Problema XI.

DAtam rectam semel sectam vtcunque, ita augere, vt rectangulum sub tota aucta & altero segmẽto cum adiecta, ad quadratum adiectæ, datam teneat rationem. oportet autem rationem datam esse inæqualitatis maioris.

Sit data recta AB, secta puncto C, eademque augenda siue producenda in E, vt ratio rectanguli A EC, ad quadratum EB, sit eadem quæ est AB ad BF. conueniãt hæ ad angulum rectum ABF, ducaturque AF producta vt libet, & fiat angulus BCD semirectus, seceetque recta DC producta, rectam AF in G pũcto. & eidẽ GCD occurrat recta FB in D. tum diuisa recta DF bifariam in M, ducatur recta GM protensa in infinitum. & à puncto B agatur recta BL, perpendicularis in ipsam GM, quæ protrahatur quantumlibet in Z. fiatque ipsi BL, æqualis LH. tum centro M, interuallo MD, ducatur semicirculus DαF, quem tangat recta GαZ, à puncto G, occurrens rectæ DLHZ, in Z puncto. & rectangulo DZH, fiat æquale quadratum ZP, in tangente GαZP. & à P puncto ducatur perpendicularis in ipsam GαZP, quæ sit PR, occurrẽs rectæ GM, in R, a quo pũcto R, ducatur RE perpendicularis in ipsam AB productam, eritque E, punctum quæsitum.



Nam vt supra puncta B,H,P, sunt in circulo cuius cētrum R, semidiameter RP, vel RS, & rectangulum CES quadrato BE æquale. est autem rectangulum AEC, ad rectangulum CES, vt AE ad ES, id est AB ad BF. ergo & rectangulum AEC, ad quadratum EB, erit vt AB ad BF, quod erat faciendum.

Determinatio per se manifesta est.

Problema XII.

D*Atam rectam semel sectam vtcunque, ita augere, vt rectangulum sub composita ex altero segmẽto cum augmento, et augmento, ad quadratum totius auctæ, datam teneat rationem. oportet autem rationem datam, esse minoris inæqualitatis.*

Sit data AB, secta puncto C, producendaque in E, vt rectangulum CEB, ad quadratum AE, rationem habeat datam CB ad BF, quæ conueniant ad angulum rectum CBF. ducaturque recta CF. & fiat angulus FBG, semirectus. occurratque recta BG, rectæ CF, in G pũcto, per quod ducatur recta AG, secans peripheriam, centro M. (vbi recta BF bissecatur) & interuallo MB, vel MF decircinatam in puncto H. ducaturque recta BH, cui parallela exeat à puncto, A, secans rectam GB productam, in T puncto, a quo ad rectam AB productam, ducatur TE, eritque E punctum quæsitum,

Sunt enim ex prædemonſtratis puncta T, A, in circulo cuius centrum R, & ſemidiameter TR, & angulus AER rectus, ex conſtructione, quadratum igitur EA, æquale erit rectangulo ſub TE vel BE & reliquo diametri ſegmento. (quod hic ſpatij anguſtia deſcribere non patitur) eſt autem CEB rectãgulũ ad rectangulum ſub BE & dicto ſegmento, vt CE ad dictum ſegmentum, id eſt vt CB ad BF. ergo rectangulum CEB, ad quadratum AE erit vt CB ad BF. quod erat faciendum.

Ad reliqua determinatę ſectionis problemata, χειραγωγὸν hic tibi damus præmiſſam effectionem noſtram geometricam, cuius ductu, hanc viam quantumuis ſalebroſam aut aſperam, facillime peruades, his præmiſſis principijs.

Magnitudines ſub ijſdem altitudinis & baſibus, inter ſe ſunt æquales.

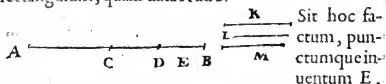
Si fuerit vt recta ad rectam, ita rectangulum ad rectangulum, ſolidum factum ex ſecundo in tertium, æquatur ſolido facto ex primo in quartum, & contra, ſi ſolidum ſolido æquatur, erit vt baſis ad baſin, ita altitudo & altitudinem *propoſ. 34. lib. 11. Euclid.*

Problema XIII.

Datam rectam terminatam, duobus punctis vtcunque ſectam, ita denuo ſecare & rectangula duo, ſub ſegmentis quibuſlibet duobus punctis datis, & inuento terminatis, datam inter ſe teneant rationem.

Sit data recta AB, ſecta punctis C, D, iterumque ſecanda, primum in alterutro ſegmento extremo, vt

DB, atque hinc triplex existit casus. Primus, (posito E puncto quæsito,) vt sit ratio CED rectanguli, ad BEA rectangulum, qualis data R ad S.



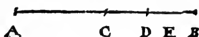
Sit hoc factum, punctumque inuentum E, & erit rectangulum CED æquale duobus, scilicet, ED quadrato & ED in CD. ergo BEA, æquale ei quod oritur, si applicentur solida ex S in ED quadratum, & in ED in CD ipsi R, est autem illud BE in EA, id est BD in DE minus ED quadrato, plus BD in DA, minus DE in DA ergo ex præmisso principio, solida ex S in ED quadratū, & ex S in ED in DC, æqualia erunt solidis ex R in BD in DE minus R in ED quadratum, plus R in BD in DA, minus R in DE in DA. & ęqualium prosaphæresi, S in ED quadratum plus S in ED in DC, plus R in ED quadratum, plus R in DE in DA, minus R in BD in DE, æquabuntur R in BD in DA: erit igitur vt S plus R in ED, plus S in DC plus R in DA minus BD, ad R in BD, ita DA ad DE. quæ proinde dabitur per lemma nostrum analyticum.

Ego hoc exemplo, ad synthesin tibi præibo, tu in reliquis, si vis, imitare.

Compositæ ex R & S, applicentur rectangula, S in DC, R differentiam DA, BD, & compositæ ex latitudinibus ortis, sit æqualis K. tum eidem compositæ ex RS, applicetur rectangulum R in BD, & latitudini ortiuæ sit æqualis L. tum rectangulo ex L in DA, sit æquale quadratum M, dataque M media, & K differentia

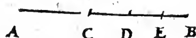
rentia extremarum, inueniantur extremæ, quarum minori sit æqualis DE. dico E esse punctum quæsitum. quoniam enim rectangulum ex DE in compositam ex K & DE, est æquale quadrato M, id est rectangulo ex L in DA ex constructione, erit vt composita ex K & DE ad L, ita DA ad DE. atqui vt composita ex k & DE, ad L, ita rectangulum sub composita ex R & S, & cõposita ex k & DE, ad rectangulum sub composita ex eisdem R, S, & L, id est ita aggregatum ex S in DC, R in differentiam DA, & BD, & composita ex RS in DE, ad R in BD. & ex præmisso principio aggregatum S in DC in DE, R in differentiam DA & BD in DE, composita ex R, S, in DE quadratum, æquabitur R in BD in DA. & æqualium prosaphæresi aggregatum S in CD in DE, S in DE quadratum, æquabitur R in BD id DA minus R in differentiam DA, BD in DE, minus R in DE quadratum. & ex eodem principio, erit DC in DE, plus DE quadrato, id est DE in CE. ad BD in DA minus differentia DA, BD in DE, minus DE quadrato, id est ad BE in EA, (est enim DA si maior fuerit ipsa DB, æqualis ipsi DB simul cum earundem differentia, vnde sublata differentia & DE, relinquetur EB.) vt R ad S. quod erat demonstrandum. Cæterum analyseos ratio habenda est, si DB ipsa DA maior, siue minor, siue ipsi æqualis fuerit. hic enim posuimus maiorem.

Secundus casus ex hoc epitagmate esse potest, quum ita iubetur data recta secari in E, vt sit rectangulum AED, ad rectangulum BEC vt R ad S.



Sit factum: eritque AED rectangulum æquale DE quadrato, plus AD in DE, & BEC rectangulum ęquale DB in DE, minus DE quadrato, plus CD in DB, minus CD in DE. est autem vt R ad S, ita DE quadratum, plus AD in DE, ad rectangulum quod oritur ex applicatione S in DE quadratum, plus S in AD in DE ipsi R; ex præmissis ergo, S in DE quadratum, plus S in AD in DE, applicatum ipsi R, ęquabitur DB in DE, minus DE quadrato, plus CD in DB, minus CD in DE, & S in DE quadratum, plus S in AD in DE, æquabitur R in DB in DE, minus R in DE quadratū, plus R in CD in DB minus R in CD in DE, & ęqualium prosaphęresi S in DE quadratum, plus S in AD in DE, minus R in DB in DE, plus R in DE quadratum, plus R in CD in DE. ęquabitur R in CD in DB. ergo vt S plus R in DE, plus S in AD, plus R in CD, minus R in DB, ad CB in DB. ita R ad DE, quæ propterea dabitur.

Reliquus casus ex eodem epitagmate est, vt sit ratio rectanguli BED, ad rectangulū AEC, qualis data R ad S.



Sit factum: & erit illud æquale BD in DE, minus DE quadrato. hoc autem æquale AD in CD, plus CD in DE, plus AD in DE, plus DE quadrato. vt autem R ad S ita DB in DE, minus DE quadrato, ad id quod oritur si applicetur S in DB in DE minus S in DE quadratum ipsi R. & ex præmissis erit s in DB in DE minus DE quadrato, ęquale R in AD in CD, plus R in CD in DE, plus R in AD in DE, plus R in DE quadratum.

Et ęqualium prosaphæresi, S in DB in BE, minus S in DE quadratum, minus R in CD in DE, minus R in AD in DE minus R in DE quadratum, ęquale erit *R* in AD in CD, igitur vt S in DB minus S plus *R* in DE, minus R in CD, minus R in AD, ad AD in CD, ita R ad DE, quæ proinde vt prius, dabitur.

Atqui totidem orientur casus, ex duobus reliquis ἐπιτάγματι, si nimirum iubeatur ita secari data recta in intermedio segmento, siue ita augeri, quibus eodem modo satisfieri potest. sed hæc satis sunt ad vsum lemmatis nostri tyronibus manifestandum, qui inde petant singulorum casuum, quum Syntheses, tum determinationes, quæ quidem ex applicationibus sponte sese offerunt.

Hæc Apollonij Pergæi Problemata, ad determinatam sectionem spectantia, extincta, resuscitauit vir acutus & ingeniosus Villebrodus Snellius, qui etiam non minus fœliciter, & quæ ad spatij & rationis sectiones eodem fato interiere, restituit. sed messis quam & ego ex eiusdem agri cultura feci, hic tibi copiam libens facio.

Problema XIIII.

IN dato triangulo parallelogrammum rectangulum inscribere, æquale dato. oportet autem rectangulum datum, semisse dati trianguli maius non esse.

Sit datum triangulum ABC, datúmque rectangulum EBCD, cuius latus ED, secet dati trianguli latus alterutrum, vt AC, in K puncto. tum rectangulo ACK, fiat æquale rectangulum AFC, ducaturque recta FI, parallela basi BC, & demittantur perpẽdiculares in basin IG, FH, dico rectangulum IGHF, esse æquale dato, EBCD.

Eſt, enim ex conſtructione A C ad AF, vt FC ad Ck. vt autem A C ad AF, ita BC ad IF, & vt FC ad Ck, ita FH ad DC, ergo vt BC ad IF, ita FH, ad DC. & rectangulum BC in DC, rectangulo IF in FH æquale: quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

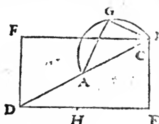
Hinc patet maximum inſcriptum rectangulum, æquale eſſe ſemiſſi ipſius trianguli, nam quoniam rectangula AFC, ACk, æqualia ſunt, maximum autem rectãgulum ſub ſegmẽtis ipſius AC, eſt quadratum dimidij ſegmẽti, id eſt rectangulum ſub tota AC, & quarta eiuſdem parte, vt autem AC ad Ck, ita tota perpendicularis a vertice trianguli A, ad baſim BC, eſt ad rectam DC, ſi igitur DC æqualis fuerit quartæ parti perpendicularis, ſecabitur AC in F, biſariam & æqualiter, eſt autem rectãgulum ſub tota baſe in quartam partem perpẽdicularis, æquale dimidio totius trianguli.

Problema XV.

D*Atis exceſſibus diametri parallelogrammi rectanguli, ſupra latera inæqualia, inuenire latera.*

Sint dati exceſſus AB, CB, & ſuper rectam AB, deſcribatur ſemicirculus A G B, in quo coaptetur recta AG, ipſi AC æqualis, & ducatur recta GB. tum data GB media, & ipſius CB dupla, differentia extremarũ inuenian-

tur extremæ, quarum maior sit BE. tum ex BE & composita ex BE & AC, id est DE, fiat rectangulum DFBE, quod dico esse quæsitum.



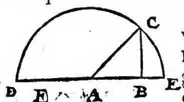
Est enim ex cōstructione, quadratum GB, æquale rectangulo sub BE, & BE minus duplo ipsius CB, id est quadtato ipsius BE, minus BE in CB bis. est autem G B quadratum, æquale quadrato A B, minus A G vel AC quadrato, id est CB quadrato, plus rectangulo bis sub CB, CA, ergo BE quadratum minus BE in CB bis, æquale erit CB quadrato, plus CB in CA bis. & additis vtrinque æqualibus (nempe BE in CB bis) BE quadratum, æquabitur CB quadrato, cum quatuor rectangulis, duobus sub CB, BE, & totidem CB, CA, sed BE vel HE bis (facta nempe HE ipsi BE æquali) cum AC vel DH bis, (est enim ex constructione, DE æqualis compositæ ex BE vel HE & AC.) est dupla ipsius DE. ergo quadratum BE æquale est rectangulo, sub dupla ipsius DE, & BC, vna cum BC quadrato, id est rectangulo sub composita ex DE dupla cum BC, & BC. addatur commune quadratum DE, eruntque quadrata BE, DE, id est BD quadratum, æquale rectangulo sub composita ex DE dupla cū BC, & BC, simul cum DE quadrato. sed quadratū BD, est æquale rectangulo sub BC, & composita ex CB, & dupla ipsius CD, vna cum quadrato ipsius CD: erit itaque DC, ipsi DE æqualis, & CB excessus diametri supra maius latus DE: atqui AC differentia excessuum, æqualis est ipsi DH, ex constructione. ergo DA reliqua, re-

liquæ HE, id eſt BE, æqualis erit. & AB, exceſſus eiuſdem diametri ſupra minus latus BE. eſt itaque DF BE rectangulum quæſitum. quod erat demonſtrandum.

Problema XVI.

DAto exceſſu diametri quadrati, ſupra latus eiuſdem, inuenire latus.

Sit datus exceſſus AB, cuius duplo æqualis fiat FB, cique ad angulum rectum addatur BC, ipſi BA æqualis. tum data FB differentia extremarum, & BC media, inueniantur extremæ, quarum maior DB lateri quæſito erit æqualis.



Eſt enim quadratum AB vel BC, id eſt rectangulum D B in BE, vel DF, cũ rectangulo DB in FB, æquale quadrato DB. & AB quadratum bis, cum rectangulo DB in FB bis, æqualia DB quadrato bis, ſed AB quadratum bis; eſt æquale CA vel AD quadrato & DB in FB bis, eſt ęquale FB quadrato ſemel, plus FB in DA bis. (eſt enim FB in BD ſemel, æquale FB quadrato ſemel, plus FB in DF, deinde idem quoque æquale eſt, FB in DA & FB in AB, vel AF: ſed FB in AF, plus FB in DF eſt FB in DA.) ergo DA quadratum, plus FB quadrato ſemel plus FB in DA bis, id eſt quadratum cõpoſitæ ex DA, FB, eſt æquale DB quadrato bis, & eſt DB latus quadrati cuius compoſita ex DA, FB eſt diameter, & FA vel AB differentia diametri, & lateris. quod erat faciendum.

Problema XVII.

DAtis quatuor rectis, quarum tres vtcunque sumptæ relicta sint maiores, ex quatuor datis, quadrilaterum circulo inscriptibile construere, id est cuius bini anguli oppositi, æquentur duobus rectis.

Si vel omnes quatuor, vel duæ saltem, inter se fuerint æquales, constructio facilis erit, si enim primum, fiat quadratum: sin alterum, fiat vt differentia duarum inæqualiũ ad minorem, ita æqualium altera, ad aliam, quæ crus erit triãguli Isoscelis, supra minorem vt basim, extra circulum constituti, cuius trianguli crura, si datis æqualibus augeantur, fiet quęsitum. sed sint rectę AB, AC, CD, DB, omnes inæquales. sitque factum: & occurrant duæ CA, DB, extra circulum in E. eritque vt CD ad AB, ita EC ad EB, & ita ED ad EA, & propterea quoque vt CD ad AB, ita composita ex EC, ED, ad compositam ex EB, EA. & diuidendo, vt differẽtia CD, AB ad AB, ita differentia compositæ ex EC, ED, & compositæ ex AE, EB, id est composita ex CA, BD, datis ad compositam ex AE, EB, quę propterea dabitur: ergo & composita quoque ex CE, EB: est autem vt CD ad AB, ita CE ad EB, dabitur igitur EB. ergo & tota ED, & reliqua EA, totaque CE.

Componetur autem sic. sint quatuor datæ rectæ F, G, H, I, omnes inter se inæquales, sumaturque quæuis maiorum nimirum G, cum minima I, fiatque vt differẽtia earumdem ad minimam I, ita composita ex reliquis duabus F, & H, ad aliam rectam, quæ sit K: hæc compo-

natur cum reliquarum altera vt F, ſitque compoſita P, L. tum fiat vt eadem G ad I., ita huius compoſitæ vltimæ vnum ſegmentum P, ad reliquum L. iungaturque hoc ſegmentum cum vltima relicta H, ſitque compoſita ipſi M æqualis, at eadem ablata à compoſita priore relinquat P. tum poſita recta CD, ipſi G ęquali centro D, interuallo rectę M, deſcribatur arcus circuli, & centro C, interuallo rectę P, alius priorem interſecans in *E* puncto, tum in re‹ct›is CE, DE, ſumantur ſegmenta, AC, *B*D, ipſis F, H æqualia, & connectatur recta A*B*: dico quadrilaterum ACD*B* eſſe quæſitum.

L P E A B K M C D F G H I

Quoniam enim ex cõſtructione, eſt vt differentia rectarum G & I, ad minorem I, ita rectæ F, H, ſimul. i AC, *BD* ſimul, ad k, i. AE, EB ſimul: erit & cõponendo vt G ad I, ita CE, *ED* ſimul, ad AE, EB ſimul, atqui vt eadem G ad, I ita P ad L, id eſt A*E*, pars ad *E*B partem .: ergo & reliqua quoque *DE*, ad reliquam A*E* erit, vt tota *CED* ad

ad totam A*EB* ,id eſt vt G ad I. & quoniam eſt vt C*E* ad *EB* ,ita *DE* ad *EA* , ſimilia erunt triangula *CED*, *BE*A , punctaque A,*B*,C,D,in circulo.& vt *CE* ad *EB*, ita G,id eſt CD,ad A*B* : erit igitur A*B* ipſi I ęqualis , & quadrilaterum quęſitum C A B D. quod erat faciendum.

Problema XVIII.

DAto quadrato , a quouis angulorum rectam educere, quæ cum latere ſubiacente producto , & latere oppoſito , triangulum rectangulum extra quadratum conſtituat , quod ad quadratum datum teneat rationem.

Sit datum quadratum A*B*CD,ratioque data R ad S. fiat vt R,ad compoſitam cex R & S , ita *B*C latus quadrati , ad rectam AF,quę ab angulo A educta, ſecet latus B C productum , in F. tum centro F , interuallo FA, ducatur circulus *E*AG,& agatur recta AG , quam dico problema efficere.

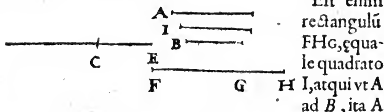
Quoniam enim eſt R ad R & S ſimul,vt *B*C ad FA,id eſt vt ABCD quadratum , ad rectangulum ſub A*B* , AF. eſt autem ABCD quadratum æquale trapezio AECH; (ducta nimirum AE) ſunt enim triangula A E B, A H D æqualia, quibus addito communi trapezio ABCH, fit quadratũ ABCD, æquale trapezio AECH, & rectangulu m ſub AB

AF, est æquale triangulo AEG. ergo vt R ad R S simul, ita trapezium AE CH, ad triangulũ AEG: & diuidendo vt R ad S ita trapezum AECH, id est quadratum A B CD. ad triangulum HCG, quod erat faciendum.

Problema XIX.

DAtam rectam ita secare, vt rectangulum sub tria, et vno segmentorum, ad alterius segmenti quadratum, datam teneat rationem.

Sit data recta DE, data rati o A ad B, inter quas media proportionalis sit I, dataque I mediâ & A differentia extremarum, inueniantur extremæ FH, GH. tum fiat vt FG ad GH, ita DC ad CE. eritque rectangulũm DEC, ad quadratum CD, vt A ad *B*.

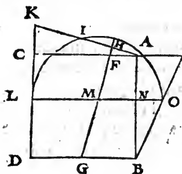


Est enim rectangulũ FHG, ęquale quadrato I, atqui vt A ad *B*, ita A quadratum ad I quadratum, id est FG quadratum(ponitur enim FG ipsi Æqualis) ad I quadratum, id est ad rectangulum FHG, vt autem FG ad GH, ita DC ad CE: & componendo vt FH ad HG, ita DE ad EC, & conuertẽdo vt FH ad FG, ita DE ad DC: ęquales ergo sunt rationes FH ad FG & HG ad FG, rationibus DE ad DC, & CE ad CD: sed ex illis composita est ratio FHG rectanguli, id est I quadrati, ad FG quadratum, id est A quadratum,

ex iſtis vero compoſita eſt ratio DEC rectanguli, ad DC quadratum, ergo vt FG vel A quadratum, ad FHG rectangulum, vel I quadratum, id eſt vt A recta ad B rectam, ita DC quadratum ad DEC rectangulum, quod erat faciendum.

ALITER.

Sit data recta A B, ſuper quam cõſtruatur quadratum ABDC, ſitque ratio data AB ad AE, quæ conuectantur ad angulum rectum EAB, cui ſubtendatur recta EB. tum diuidantur rectæ CE, DB, bifariam in punctis G, F, per rectam GF extenſam quantumlibet in H, & a puncto A in rectam GFH, ducatur perpendicularis AHIK, quæ producta concurrat cum latere DC protenſo, in K puncto. ſintque AH, HI, æquales, tum rectangulo AKI, fiat æquale quadratum KL, & per L punctum, ducatur recta LMNO, ipſis DB, CA parallela, ſecans rectas CD, GF, BA, BE, in punctis L, M, N, O. dico rectam AB ſectam in N, vt iubetur. Quoniã enim recta GMF, ſecat rectas CE, DB bifariam, ſecabit quoque bifariã rectas omnes ipſis CD, BE, terminatas, & parallelas ipſis DB CE, qualis eſt LMNO ex prædemonſtratis, & rectangulo AKI, æquale eſt quadratum KL, erunt puncta L, I, A, O in circulo cuius centrum M, & diameter LMNO, quæ quoniã perpendicularis eſt ipſi AB, erit quadratum AN, rectangu-



lo LNO ęquale. ſed rectangulum LNO, ad rectangulum LNB, ſiue ABN, eſt vt NO ad NB: ergo & quadratum AN, ad rectangulum ABN, erit vt NO, ad NB, ideſt AE ad AB, quod erat faciendum.

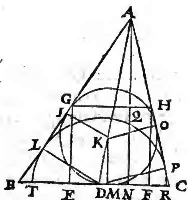
Problema XX.

D*Atis circulo, ſemicirculo, & quadrato, quæ eidem triangulo inſcribi poſſunt, inuenire triangulum cui ea inſcribantur.*

Sit datus circulus cuius ſemidiameter KI, ſemicirculus cuius ſemidiameter DL, & quadratum EGHF. ſitque factum & triangulum quæſitum ABC. & ad puncta contactuum L, I, O, P, ſint ductæ ſemidiametri DL, KI, DP, KO, & connectantur puncta DA, KA. quoniam igitur anguli KIA, KOA, recti ſunt, lateraque KI, KO, ęqualia, & latus KA, commune, erunt anguli IAK, OAK, æquales eodemque modo & anguli LAD PAD æquales recta igitur linea eſt per pũcta DKA. ſint iam ductæ KM, AN, perpendiculares in ipſam BC: eritque vt DL ad KI, ita DA ad AK & conuertendo DL ad differentiam DL & IK, vt DA ad DK, ideſt vt AN ad KM. datur autem KM, dabitur igitur & AN perpendicularis. ſecet iam recta AN rectam GH in Q. & quoniam eſt FC ad FH, vt QH ad QA, & BE ad EG vel FH, vt GQ ad QA, erunt FC, BE ſimul, ad FH vel GE, vt GQ, QH ſimul id eſt FH ad QA. & quadratum FH datum, ęquale rectangulo ſub QA & compoſita ex BE, FC, datur autem QA, dabitur igitur compoſita ex BE, FC, & propterea tota baſis BC. & quoniam ſunt BM, BI, IA, AO, CO, CM, binę ſumptę inter ſe ęquales: erunt CB, IA ſimul, æquales ſemiſſi

perimetri tranguli ABC,& rectangulũ sub kM,& BC,IA simul,ęquale erit rectangulo,ex AN in BC semissem:dabitur igitur IA. est autem IA ad AL, vt Ik ad LD. quare dabitur etiam AL,rectaque DA.datur autem BC magnitudine & positione,quare & latera AB,AC dabuntur, totumque triangulum ABC.

Componentur autem hoc modo. fiat vt differentia duarum LD, Ik, ad maiorem LD, ita KM ad AN. sitque AQ differentia ipsarum HF, AN. tum rectis AQ, HF, inueniatur tertia proportionalis, quæ composita cum recta HF vel EF æqualis sit basi BC. tum fiat vt KM ad semissem baseos, ita AN ad aliam, ex quâ sublata BC base, relinquatur AI.& sit vt Ik ad LD, ita AI ad AL. tum quadratis AL, LD, sit æquale quadratum AD.& cẽtro D, interuallo DL, ducatur semicirculus TPR. productâque base quantumlibet, à puncto A ducantur tangentes ALB, APC, occurrentes basi productæ in pũctis B,C, eritque triangulum ABC, quæsitum.



Est enim semicirculus datus TLPR inscriptus ex constructione.& quoniam dantur AL,AI, ducatur à puncto I, recta Ik, parallela ipsi LD, occurrensque rectæ AD in k puncto. quia igitur erat vt DL, ad circuli inscribędi semidiametrum ta LA, ad IA, erit Ik æqualis semidiametro dicti circuli

Sit iam à puncto K, ducta perpendicularis KM. quoniã ergo est vt LD, ad differentiam LD & Ik, idest vt DA ad DK, ita AN ad kI, ex constructione, erunt KM, kI æquales, & circulus ex centro K, interuallo kM, vel kI. descriptus, tanget rectas AB, BC, in punctis I, M. & recta AC, tangens semicirculum TLPR tanget quoque eundem circulum ex centro k, est enim vt DA ad Ak, ita DP ad eiusdem semidiametrum KO: quare & circulus datus eidem triangulo est inscriptus. sunt iam AI, AO, CM, CO, BD, BI, binæ sumptæ, inter se æquales, igitur CM, BM, AI, simul id est BC, AI, simul, æquales erunt semissi perimetri trianguli ABC, rectangulum igitur ex KM in BC, AI simul, æquale est rectangulo ex AN in BC semissem, & BC basis, æqualis inuentæ. est autem ex constructione AQ ad GH, vt GH ad BE, FC simul, & propterea AQ, GH simul, id est AN ad compositam ex GH, BE, FC, id est ad BC, est vt AQ ad GH. ergo GH, æqualis est lateri quadrati dati. est itaque ABC triãgulum quęsitum. quod erat faciendum.

COROLLARIVM.

Eodem modo data base, perpendiculo, & aggregato laterum, inuenietur triangulum dabitur enim diameter semicirculi, triangulo quæsito inscriptibilis, quia rectãgulum sub dimidio aggregati laterum dato, & semidiametro dicti semicirculi, æquatur areæ trianguli, seu rectangulo dato sub perpendiculari & basis dimidio, dabitur etiam diameter circuli, eidem triangulo inscriptibilis, si quidem rectangulum sub semisse perimetri dicti

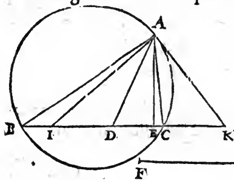
trianguli dato, & semidiametro circuli inscriptibilis, æquatur eidem areæ, siue rectangulo dato, vnde praxis & demonstratio eadem quæ supra.

Problema XXI.

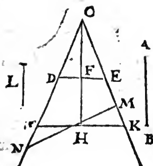
DAta base trianguli, perpendiculo, & recta a vertice in basin, angulum verticis bifariam secante, inuenire triangulum.

Si perpendicularis, rectæ à vertice in basin, angulum verticis bifariam secante, æqualis fuerit, triangulũ erit Isosceles, cuius datur basis & altitudo: quare hunc casum iure omittimus.

Sed sint inęquales, dataque basis FG, perpendicularis à vertice in basin AE, quæ in quamuis rectam, vt pote BCK, perpendiculariter incidat in E puncto. Sitque AD ab A educta, secansque rectam BCk, in D, ęqualis rectæ secanti angulum verticis bifariam. fiat angulo DAE, æqualis angulus DAI. tum rectæ AI perpendicularis sit AK, in A puncto, occurratque rectæ BC productę in K. tum data AK mediâ, & FG differentia extremarum, inueniantur extremę BkC, ducanturque rectę AB, AC dico triangulum ABC esse quæsitum.



Est enim ex cõstructione, BC æqualis datę FG. & quoniá quadratum Ak, æquale est rectãgulo BKC, erũt puncta B, A, C in circulo quem



Quoniam enim ex constructione est G recta, media proportionalis inter CF, FD. & vt CF ad G, ita CH ad *AB*. est autem & CF ad FD, vt CH ad HI: erat itaque & recta AB media proportionalis inter CH, HI: & quadratum AB, rectangulo Isosceli CIk ęquale. est etiam ex constructione NC ad CI, vt CI vel Ck ad CM, ergo, triangula NCM, ICk, æqualia erunt: & est differentia laterum NC, CM æqualis rectæ L ex constructione, est itaque triangulum NCM quæsitũ. quod erat faciendum.

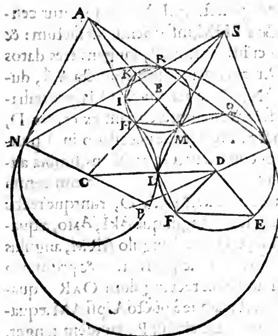
Problema XXIII.

D*Atis tribus circulis sese contingentibus, inuenire quartum qui tres datos contingat.*

Generaliter hoc obsoluit Franciscus Vieta in Apollonio suo Gallo, at specialem doctrinam, quia speciali dignam tractatum indicauit, eam tibi hîc subijcio.

Sint tres circuli quorum centra C, B, D, sese omnes primum exterius contingentes in punctis H, L, M, & sit factum. tangat scilicet circulus ex centro P, tres datos in punctis N, R, O. & per centra D, B, C, B, agantur rectæ DBA, CBS. & per pũcta L, H, agatur recta LHA, occurrẽs rectę DBA productæ in A puncto. Secetque eadẽ circulos, B, D, iterum in punctis I, F. ducanturque rectæ kI,

HM,ML,FE. (producta nempe recta BD, donec iterum secet circumferentiam circuli ex D centro, in E puncto, & eadem secet circulum ex B centro iterum in K) & ducatur recta ARQO, secans circulos ex centris B,D, in punctis R,Q,O. quoniam igitur circulus B, circulum C tangit (ducta recta CLD) erunt triangula æquicrura BIH, CHL, similia, similiter & triãgula CHL, DLF, sunt ergo lineæ BI, CLD, parallelæ, & anguli IBK, LDM, æquales, itemque IK, LM, & HM, FE parallelæ. ergo & anguli IkA, LMA çquales erunt, sed IkA est æqualis ipsi IHM. triangula igitur LMA, AHM sunt similia, eritque AL ad AM, vt AM ad AH. & quadratũ AM rectãgulo LAH æquale; ergo AN tangens à puncto A, erit æqualis ipsi AM. & est AE ad AM, vt FE ad HM, hoc est LM ad kI, & vt LM ad KI, ita AM ad AK, ergo vt AE ad AM, ita AM ad Ak, & quadratum AM rectangulo EAk erit quoque æquale. sed rectangulo EAk æquale est rectangulum OAR (est enim AE ad AO, vt AQ ad AM, & AQ ad AM, vt AR ad Ak. ergo erit AO ad AE, vt AK ad AR, & rectangulum OAR rectangulo EAK æquale) & propterea recta AN, ipsi AM æqualis, circulum quoque ex centro P tanget. tangebat autem & circulum ex C centro, est ergo N punctum contactus vtriusque circuli quorum cẽtra C,P. eodemque modo & OS recta, çqualis ipsi SH ostendetur circulos quorũ centra D P, tangere in O, puncto contactus vtriusque circuli.



Hinc oblatis tribus circulis C,B,D sese exterius cōtingentibus, inuenietur centrū quarti P, tres datos intra se contingentis. per centra enim D,B,C,B, agantur rectę DBA, CBS, & per puncta contactuum L,H,L,M, rectæ LHA, LMS. tū rectis AM, SH, fiant ęquales AN, SO, tangentes circulos C,D, vt ostensum est in punctis N,O. ducanturque rectę NC, OD, coeuntes in P, centro circuli quęsiti. Sunt enim vt ostensum est puncta N,O, in quibus quęsitus circulus, datos C,D, tangit, est itaque P centrum quæsitum.

Eodemque modo, si oblatis circulis quorum centra P,D,B, quęratur quartus cuius centrum C, τῷ ἀρβήλῳ KOM, inscribendus. reperiatur vt prius punctum A, fiatque AN ipsi AM ęqualis. tum ducatur recta NRS, cui occurrat OS in S puncto, tangens circulos ex centris D,P, in O puncto. & ducatur recta SBC, secans ductam rectam NP, in C centro circuli quęsiti: erunt enim ex demonstratis SO, SH æquales: rectęque SBC, NCP in circuli quæsiti centro sese intersecabunt.

Sunto iterum dati circuli quorum centra C,B,D, sese

exterius tangentes in punctis H,L,M. & quęratur centrum quarti τῷ ἀρξῆλῳ LHM, inſcribendi, Sit factum: & inſcriptus circulus cuius centrum P, tangens tres datos in punctis N,O,R. reperiantur vt prius puncta A,S, ducanturque rectæ AN,SO,& per puncta O,R, protrahatur recta ORIA, ſecans circumferentiam ex centro D, iterum, in X puncto, incidetque neceſſario in A punctum, quoniam per contactus, OR tranſiens, ſimilia auferet ſegmenta XO,OR,RI, ex circulis quorum centra D,P,B. agantur iam rectæ KI,MR,MO, eruntque rectæ KI,MO parallelæ vt ſupra, anguliqueAKI, AMO, æquales, ſed angulus AKI, æqualis eſt angulo ARM, angulus igitur ARM, angulo AMO æqualis erit: & propterea AO ad AM, vt AM ad AR. & rectangulum OAR, quadrato AM æquale: recta itaque à pũcto A ipſi AM æqualis, incidens in peripheriam circuli P, eundem tanget, tangit autem & circulum ex C centro (vt ſupra demonſtrandum eſt,) eſt itaque recta AN ipſi AM æqualis. eodemque modo oſtendetur & SO æqualis ipſi SH.

Hinc oblatis iterũ circulis CBD, inuentiſque punctis A, S, ſi fiat AN æqualis ipſi AM, & SO æqualis ipſi SH, tangentes circulos C, D, in punctis N, O, ducaturque rectę CN, DO ſeſe interſecantes in P, erit punctum P centrum quæſitũ ſic oblatis circulis quorum centra C, D, P, inuenietur cẽtrum circuli B, tres datos contingẽtis. Inueniatur enim vt dictum eſt T punctum, & ipſi TL fiat æqualis TR, quę incidet in punctum cõtactus circulorum P, B (quod eodem prorſus modo demõſtrari poteſt, quo oſtenſum eſt rectas AN, SO. tangere circulos ex centris C, P, D.) ducaturque PRB. tum actâ OS, in ipſam DP perpendiculariter incidente in O puncto, ei

occurrat recta per puncta N, R, in S, à quo si agatur recta SC, ad centrum C, secabit ea rectam PRB, in B centro quæsito, vt ex demonstratis liquet. quod si recta per puncta N, R rectam OS non secuerit ad partes S, problema impossibile erit.

Et hoc ἀμοίβαιον erat illud problema Francisci Vietæ, adclarissimum virum Adrinum Romanum, pro suo, omnibus totius orbis Mathematicis proposito problemate, in libello quem inscripsit, idea Mathematica.

